

## Práctica 2: Existencia y Unicidad de Soluciones

---

1. **Ecuación de Volterra.** Sean  $I, J$  dos intervalos alrededor de  $t_0$  y sea  $U$  un entorno de  $x_0$ , y consideremos la siguiente ecuación integral - llamada la *ecuación de Volterra*-

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s)) ds, \quad (1)$$

donde  $f$  es una función continua definida de  $I \times J \times U$  en  $\mathbb{R}$ .

- a) Probar que si  $f$  es una función localmente Lipschitz en la tercer variable, la ecuación integral (1) admite solución única.
- b) Verificar que si  $x: I \rightarrow U$  es continua y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  continua entonces  $x \in C^1(I, U)$ .
2. Sean  $u, v$  y  $w$  funciones continuas y positivas en el intervalo  $[a, b]$  y

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t u(s)v(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Probar que:

a)

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t w(s)v(s)e^{\int_s^t v(\tau) d\tau} ds \quad \forall t \in [a, b].$$

b) Si  $w \equiv 0$  entonces  $u \equiv 0$ .

c) Si  $w$  es una función creciente en  $[a, b]$  entonces

$$u(t) \leq w(t)e^{\int_a^t v(s) ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

d) Si  $w(t) = c_0 + c_1(t - a)$  y  $v(t) = c_2$  donde  $c_0, c_1$  y  $c_2$  son constantes no negativas, entonces

$$u(t) \leq \left( c_0 + \frac{c_1}{c_2} \right) e^{c_2|t-a|} - \frac{c_1}{c_2}.$$

### Existencia

3. Sean  $t_0, a \in \mathbb{R}$  con  $a > 0$  y  $f(t, x)$  una función continua tal que

$$|f(t, x)| \leq c_1 + c_2|x|^\alpha$$

para todo  $(t, x) \in T = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, x \in \mathbb{R}^n\}$  donde  $c_1, c_2 \geq 0$  son constantes y  $0 < \alpha < 1$ . Mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

tiene al menos una solución en el intervalo  $|t - t_0| \leq a$ .

### Unicidad

4. Sean  $a, b > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $f(t, x)$  una función continua que satisface la condición de Lipschitz generalizada

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t)|x_1 - x_2|$$

para todo  $(t, x_1), (t, x_2)$  en  $Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ y } |x - x_0| \leq b\}$ , donde  $L(t)$  es una función positiva tal que la integral  $\int_{t_0-a}^{t_0+a} L(s) ds$  existe. Mostrar que el problema de valores iniciales (2) tiene a lo sumo una solución en  $|t - t_0| \leq a$ .

5. **Teorema de Unicidad de Roger.** Sea  $f(t, x)$  una función continua en la banda  $T = [0, 1] \times \mathbb{R}$  que satisface la condición

$$f(t, x) = o\left(e^{-\frac{1}{t}} t^{-2}\right)$$

uniformemente para  $-\delta \leq x \leq \delta$ , donde  $\delta > 0$  arbitrario. Además, para todo  $(t, x_1), (t, x_2)$  en  $T$  se tiene que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1}{t^2} |x_1 - x_2|.$$

Mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución en  $[0, 1]$ .

### 6. Intervalo Maximal.

7. a) Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{2}{t^2 - 1}.$$

b) Graficar la solución hallada en el ítem anterior.

8. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

¿Cuál es el intervalo maximal de la solución hallada? Hacer el gráfico de la solución y compararlo con el hecho en el ejercicio anterior.

9. Probar que el problema

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

10. Revisar la demostración de la existencia de solución de un problema de valores iniciales de la forma (2) vía Teorema del punto fijo, y deducir que si la condición de Lipschitz es global entonces la solución está definida para todo tiempo.
11. Sean  $x$  una solución maximal de (2) con  $f$  continua y Lipschitz en la segunda variable y  $(w_-, w_+)$  el intervalo maximal asociado a  $x$ . Entonces, si existe un compacto  $K$  tal que  $x(t) \in K$  para todo  $t \in (w_-, w_+)$  resulta que  $x$  está definida globalmente.
12. Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y  $f$  Lipschitz. Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), & x(0) = x_0, \\ y' = g(x)y, & y(0) = y_0, \end{cases}$$

tiene solución única en cualquier intervalo donde esté definida. ¿Se puede quitar la hipótesis de que  $f$  sea Lipschitz?

### Sistemas Autónomos

13. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función globalmente Lipschitz. Demostrar que si  $x$  es una solución para la ecuación  $x' = f(x)$  tal que existe  $\tau \in \mathbb{R}$  de manera que  $x(0) = x(\tau)$  entonces  $x$  es periódica.
14. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz. Probar que el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

es finito si y sólo si

$$\int^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty.$$

15. Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmete Lipschitz y  $x$  una solución de la ecuación  $x' = f(x)$  con intervalo maximal  $(w_-, w_+)$ . Probar que si existe el  $\lim_{t \rightarrow w_+} x(t) = L < \infty$  entonces  $L \in \partial U$  o  $f(L) = 0$ .
16. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua localmente Lipschitz para la cual eiste  $a < b$  tales que  $f(a) = f(b) = 0$ .

a) Demostrar que si  $x(t)$  es la solución del problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) \in (a, b). \end{cases}$$

entonces  $x(t) \in (a, b)$  para todo  $t \in (w_-, w_+)$ . En esta situación diremos que el conjunto  $(a, b)$  es invariante por el flujo.

- b) Mostrar que las soluciones que comienza en  $[a, b]$  están definidas globalmente.
17. Sea  $I$  un intervalo finito alrededor de  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $K$  un entorno compacto de  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ . Sean, además,  $f_n, f : I \times K \rightarrow \mathbb{R}^N$  una sucesión de funciones continuas que satisfacen la condición de Lipschitz en la segunda variable con constante  $L_n$  respectivamente. Consideremos, finalmente, las sucesiones  $t_n \rightarrow t_0$  y  $x_n \rightarrow x_0$  y la sucesión  $x_n : I \rightarrow K$  de soluciones del problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u) \\ u(t_n) = x_n. \end{cases}$$

- a) Demostrar que si  $f_n \rightrightarrows f$  y  $f$  es localmente Lipschitz, con constante  $L_0$ , entonces existe  $L$  tal que  $L_n, L_0 \leq L$  y  $x_n \rightrightarrows x$  donde  $x$  es la única solución del problema límite.
- b) Demostrar que si  $f$  no es localmente Lipschitz pero es acotada entonces existe una subsucesión  $x_{n_k} \rightrightarrows x$  tal que el límite  $x$  satisface la ecuación integral.