

Práctica 2: Existencia y Unicidad de Soluciones

1. **Ecuación de Volterra.** Sean I, J dos intervalos alrededor de t_0 y sea U un entorno de x_0 , y consideremos la siguiente ecuación integral - llamada la *ecuación de Volterra*-

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s)) ds, \quad (1)$$

donde f es una función continua definida de $I \times J \times U$ en \mathbb{R} .

- a) Probar que si f es una función localmente Lipschitz en la tercer variable, la ecuación integral (1) admite solución única.
- b) Verificar que si $x: I \rightarrow U$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial t}$ continua entonces $x \in C^1(I, U)$.
2. Sean u, v y w funciones continuas y positivas en el intervalo $[a, b]$ y

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t u(s)v(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Probar que:

a)

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t w(s)v(s)e^{\int_s^t v(\tau) d\tau} ds \quad \forall t \in [a, b].$$

b) Si $w \equiv 0$ entonces $u \equiv 0$.

c) Si w es una función creciente en $[a, b]$ entonces

$$u(t) \leq w(t)e^{\int_a^t v(s) ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

d) Si $w(t) = c_0 + c_1(t - a)$ y $v(t) = c_2$ donde c_0, c_1 y c_2 son constantes no negativas, entonces

$$u(t) \leq \left(c_0 + \frac{c_1}{c_2}\right) e^{c_2|t-a|} - \frac{c_1}{c_2}.$$

Existencia

3. Sean $t_0, a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $f(t, x)$ una función continua tal que

$$|f(t, x)| \leq c_1 + c_2|x|^\alpha$$

para todo $(t, x) \in T = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, x \in \mathbb{R}^n\}$ donde $c_1, c_2 \geq 0$ son constantes y $0 < \alpha < 1$. Mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

tiene al menos una solución en el intervalo $|t - t_0| \leq a$.

Unicidad

4. Sean $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f(t, x)$ una función continua que satisface la condición de Lipschitz generalizada

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t)|x_1 - x_2|$$

para todo $(t, x_1), (t, x_2)$ en $Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ y } |x - x_0| \leq b\}$, donde $L(t)$ es una función positiva tal que la integral $\int_{t_0-a}^{t_0+a} L(s) ds$ existe. Mostrar que el problema de valores iniciales (2) tiene a lo sumo una solución en $|t - t_0| \leq a$.

5. **Teorema de Unicidad de Roger.** Sea $f(t, x)$ una función continua en la banda $T = [0, 1] \times \mathbb{R}$ que satisface la condición

$$f(t, x) = o\left(e^{-\frac{1}{t}} t^{-2}\right)$$

uniformemente para $-\delta \leq x \leq \delta$, donde $\delta > 0$ arbitrario. Además, para todo $(t, x_1), (t, x_2)$ en T se tiene que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1}{t^2} |x_1 - x_2|.$$

Mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución en $[0, 1]$.

6. Intervalo Maximal.

7. a) Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{2}{t^2 - 1}.$$

b) Graficar la solución hallada en el ítem anterior.

8. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

¿Cuál es el intervalo maximal de la solución hallada? Hacer el gráfico de la solución y compararlo con el hecho en el ejercicio anterior.

9. Probar que el problema

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

10. Revisar la demostración de la existencia de solución de un problema de valores iniciales de la forma (2) vía Teorema del punto fijo, y deducir que si la condición de Lipschitz es global entonces la solución está definida para todo tiempo.
11. Sean x una solución maximal de (2) con f continua y Lipschitz en la segunda variable y (w_-, w_+) el intervalo maximal asociado a x . Entonces, si existe un compacto K tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in (w_-, w_+)$ resulta que x está definida globalmente.
12. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y f Lipschitz. Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), & x(0) = x_0, \\ y' = g(x)y, & y(0) = y_0, \end{cases}$$

tiene solución única en cualquier intervalo donde esté definida. ¿Se puede quitar la hipótesis de que f sea Lipschitz?

Sistemas Autónomos

13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función globalmente Lipschitz. Demostrar que si x es una solución para la ecuación $x' = f(x)$ tal que existe $\tau \in \mathbb{R}$ de manera que $x(0) = x(\tau)$ entonces x es periódica.
14. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Probar que el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

es finito si y sólo si

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty.$$

15. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmete Lipschitz y x una solución de la ecuación $x' = f(x)$ con intervalo maximal (w_-, w_+) . Probar que si existe el $\lim_{t \rightarrow w_+} x(t) = L < \infty$ entonces $L \in \partial U$ o $f(L) = 0$.
16. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua localmente Lipschitz para la cual eiste $a < b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

a) Demostrar que si $x(t)$ es la solución del problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) \in (a, b). \end{cases}$$

entonces $x(t) \in (a, b)$ para todo $t \in (w_-, w_+)$. En esta situación diremos que el conjunto (a, b) es invariante por el flujo.

- b) Mostrar que las soluciones que comienza en $[a, b]$ están definidas globalmente.
17. Sea I un intervalo finito alrededor de $t_0 \in \mathbb{R}$ y K un entorno compacto de $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Sean, además, $f_n : I \times K \rightarrow \mathbb{R}^N$ una sucesión de funciones continuas que satisfacen la condición de Lipschitz en la segunda variable con constante L_n respectivamente y tal que $f_n \rightrightarrows f$. Consideremos, finalmente, las sucesiones $t_n \rightarrow t_0$ y $x_n \rightarrow x_0$ y la sucesión $x_n : I \rightarrow K$ de soluciones del problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u) \\ u(t_n) = x_n. \end{cases}$$

Demostrar que si f no es localmente Lipschitz pero es acotada entonces existe una subsucesión $x_{n_k} \rightrightarrows x$ tal que el límite x satisface la ecuación integral.