3

Teoremas de Unicidad

A continuación daremos algunos teoremas de unicidad para un problema de valores iniciales de la siguiente forma

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Teorema de Unicidad de Peano

Teorem 3.1.1 (Teorema de Unicidad de Peano)**.** *Sean $a, b > 0$ y $f(t,x)$ una función continua en*

$$Q_+ = \{(t,x)\colon\ t_0 \le t \le t_0 + a, |x - x_0| \le b\}$$

y decreciente en x para todo $t \in [t_0, t_0+a]$ fijo. Entonces (3.1) tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$.

Demostración. Para simplificar la notación supondremos que $t_0 = 0$. Supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones de (3.1) en $I = [0, a]$ y que existe $t \in I$ tal que $x_1(t) \neq x_2(t)$. Asumiremos que $x_2(t) > x_1(t)$. Sean

$$A = \{t \in I\colon\ x_2(t) > x_1(t)\} \quad \text{y} \quad t_1 = \inf A.$$

Observar que t_1 existe porque 0 es una cota inferior para A. Luego, dado $\varepsilon > 0$, resulta que

$$x_2(t) > x_1(t) \quad \forall t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$$

y como f es decreciente tenemos que $f(t, x_1(t)) > f(t, x_2(t))$ para todo $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$ o lo que es lo mismo

$$x_1'(t) \ge x_2'(t) \quad \forall t \in (t_1, t_1 + \varepsilon).$$

Por lo tanto si consideramos la función

$$z(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

resulta que z es decreciente en el intervalo $(t_1, t_1 + \varepsilon)$ y como $z(t_1) = 0$ resulta que $z(t) \leq 0$ en $(t_1, t_1 + \varepsilon)$ o sea

$$x_2(t) \leq x_1(t) \quad \forall t \in (t_1, t_1 + \varepsilon),$$

lo que es una contradicción. Esta contradicción provino de suponer que existía $t \in [0, a]$ tal $x_1(t) \neq x_2(t)$, luego no existe y por lo tanto $x_1 \equiv x_2$ en I. □

Ejemplo 3.1.2. ¿Se puede cambiar la hipótesis de que la función $f(t, x)$ sea decreciente respecto de la segunda variable por que sea creciente en el Teorema 3.1.1?

Consideremos la función $f(t, x) = f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$, que es creciente y continua, y el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Observemos que este problema tiene dos soluciones $x \equiv 0$ y $x(t) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

Por lo tanto no podemos cambiar la hipótesis de decrecimiento por crecimiento en el Teorema 3.1.1.

Observación 3.1.3. Si $f(t, x)$ es continua en

$$Q_- = \{(t, x) \colon t_0 - a \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq b\}$$

y creciente en x para todo $t \in [t_0 - a, t_0]$ fijo. Entonces (3.1) tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0]$.

Ejemplo 3.1.4. Considere la función $f(t, x)$ en la banda

$$T = \{(t, x) \colon t \leq 1\},$$

definida por

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, y \in \mathbb{R}. \\ 2t & \text{si } 0 < t \leq 1, x < 0, \\ 2t - 4\frac{x}{t} & \text{si } 0 < t \leq 1, 0 \leq x \leq t^2, \\ -2t & \text{si } 0 < t \leq 1, t^2 < x. \end{cases}$$

Mostraremos que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene solución única en el intervalo $(-\infty, 1]$.

Comencemos por observar que la función f es continua y acotada (2 es una cota de f en T) entonces, por el Teorema de Existencia de Peano, podemos asegurar que existe una solución en un intervalo alrededor del 0. También podemos observar que si fijamos $t \in (-\infty, 0]$ la función es constante y si fijamos $t \in (0, 1]$ la función es decreciente con respecto a la variable x. Entonces, usando el Teorema (3.1.1) y la última observación, podemos concluir que existe a lo sumo una única solución en el intervalo $(-\infty, 1]$. Por último se puede ver que la única solución es

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{x^2}{3} & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

3.2 Otros Teoremas de Unicidad

En lo que sigue consideraremos el siguiente conjunto

$$Q = \{(t, x) \colon |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

donde $a, b > 0$.

Teorem 3.2.1 (Teorema de Unicidad de Osgood)**.** *Sean $f(t, x)$ una función continua en Q tal que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq w(|x_1 - x_2|), \tag{3.2}$$

donde w es una función continua y creciente en $[0, +\infty)$ tal que $w(0) = 0$, $w(t) > 0$ para todo $t > 0$ y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon} \frac{dt}{w(t)} = \infty. \tag{3.3}$$

Entonces (3.1) tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Para la demostración de este teorema vamos a necesitar un resultado previo.

Lema 3.2.2. *Sea w una función como en el Teorema 3.2.1 y sea u una función no negativa y continua en el intervalo $[0, a]$. Entonces, si vale que*

$$u(t) \leq \int_0^t w(u(s))\, ds \quad \forall t \in (0, a], \tag{3.4}$$

resulta que $u \equiv 0$ en $[0, a]$.

Demostración. Comencemos por definir la función

$$v(t) = \max\{u(s) \colon s \in [0, t]\}$$

para todo $t \in [0, a]$. Supongamos que $v(t) > 0$.

Observemos que para todo $t \in [0, a]$:

- $u(t) \leq v(t)$;

- Existe $z \in [0, t]$ tal que $u(z) = v(t)$.

Entonces, por (3.4) y como w y v son crecientes y positivas, tenemos que

$$v(t) = u(z) \leq \int_0^z w(u(s))\, ds \leq \int_0^t w(v(s))\, ds.$$

Tomemos ahora,

$$\overline{v}(t) = \int_0^t w(v(s))\, ds,$$

observemos que:

- $\overline{v}(0) = 0$;
- $v(t) \leq \overline{v}(t)$;
- $\overline{v}\,'(t) = w(v(t)) \leq w(\overline{v}(t))$.

Entonces, para todo $\delta \in [0, a]$

$$\int_\delta^a \frac{\overline{v}\,'(t)}{w(\overline{v}(t))}\, dt \leq a - \delta \leq a.$$

Pero si tomamos el cambio de varibles $h = \overline{v}(t)$ resulta que

$$\int_0^a \frac{\overline{v}\,'(t)}{w(\overline{v}(t))} = \int_\varepsilon^\alpha \frac{1}{w(h)}\, dh,$$

donde $\overline{v}(\delta) = \varepsilon$ y $\overline{v}(a) = \alpha$. Luego tenemos que, como $\varepsilon \to 0$ cuando $\delta \to 0$,

$$a \geq \lim_{\delta \to 0} \int_\varepsilon^\alpha \frac{1}{w(h)}\, dh = \infty$$

lo que es un absurdo. Esto muestra que $v(t)$ no puede ser positiva, entonces $v \equiv 0$ en $[0, a]$ y por lo tanto $u \equiv 0$ en $[0, a]$. $\square$

Estamos en condiciones de hacer la demostración del Teorema 3.2.1.

Demostración del Teorema 3.2.1. Para simplificar la notación vamos a considerar el caso que $t_0 = 0$ y vamos a probar la unicidad en el intervalo $[0, a]$, quedando para el lector la demostración de la unicidad en el intervalo $[-a, 0]$.

Supongamos que existen dos soluciones x_1 y x_2 del problema (3.1) en el $[0, a]$. Entonces, usando (3.2), resulta que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_0^t w(|x_1(s) - x_2(s)|)\, ds \quad \forall t \in [0, a].$$

Definimos $u : [0, a] \to \mathbb{R} > 0$

$$u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Observemos que u es continua y positiva en $[0, a]$ y satisface la desigualdad (3.4). Entonces, usando el Lema 3.2.2, tenemos que $u \equiv 0$ en $[0, a]$, o lo que es lo mismo, $x_1 \equiv x_2$ en $[0, a]$. $\square$

Ejemplo 3.2.3. A continuación daremos algunos ejemplos de funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.1.

$$w_1(z) = Lz^\alpha \quad (\alpha \geq 1) \quad \text{y} \quad w(z) = \begin{cases} -z\ln(z) & \text{si } 0 \leq z \leq e^{-1}, \\ e^{-1} & \text{si } z \geq e^{-1}. \end{cases}$$

Teorem 3.2.4 (Teorema de Unicidad de Nagumo)**.** *Sea $f(t,x)$ continua en Q y tal que*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq \frac{k}{|t-t_0|}|x_1 - x_2| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in Q, \forall t \neq t_0 \tag{3.5}$$

donde $k \leq 1$. Entonces (3.1) a lo sumo tiene una solución en el intervalo $I = [-a+t_0, a+t_0]$.

En la demostración de este teorema necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.2.5. *Sea u una función no negativa y continua en $I = [-a+t_0, t_0+a]$ tal que $u(t_0) = 0$ y u es derivable en t_0 con $u'(t_0) = 0$. Entonces la desigualdad*

$$u(t) \leq \left| \int_{t_0}^{t} \frac{u(s)}{s - t_0}\, ds \right| \tag{3.6}$$

implica que $u \equiv 0$ en I.

Demostración. Para simplificar la notación supondremos que $t_0 = 0$ y además que es suficiente mostrar que $u \equiv 0$ en $[0,a]$. Comencemos por definir

$$v(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{s}\, ds,$$

la integral existe puesto que

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{t} = u'(0) = 0.$$

Además v es no negativa y usando (3.6)

$$v'(t) = \frac{u(t)}{t} \leq \frac{v(t)}{t}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{t}\right) \leq 0$$

y por lo tanto $\frac{v}{s}$ es decreciente. Como $v(0) = 0$, tenemos que v es no positiva. Por lo tanto $v \equiv 0$ en el $[0,a]$, y entonces $u \equiv 0$ en $[0,a]$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 3.2.4.

Demostración del Teorema 3.2.4. Supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones de (3.1) en I. Entonces, usando (3.5), tenemos que

$$|x_1 - x_2| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \frac{|x_1 - x_2|}{|s - t_0|} \right| ds.$$

Tomemos $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. Observemos que:

- u es continua y no negativa;
- $u(t_0) = 0$;
- u satisface (3.6).

Para poder aplicar el lema anterior sólo nos falta ver que u es derivable en 0 y que $u'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|x_1(t_0+h) - x_2(t_0+h)|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{x_1(t_0+h) - x_2(t_0+h)}{h} \right| \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{x_1(t_0+h) - x_1(t_0) + x_2(t_0) - x_2(t_0+h)}{h} \right| \\
&= |x_1'(t_0) - x_2'(t_0)| \\
&= |f(t_0, x_1(t_0)) - f(t_0, x_2(t_0))| \\
&= 0
\end{aligned}$$

De manera similar

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} = 0.$$

Por lo tanto u es derivable en t_0 y $u'(t_0) = 0$.

Luego, usando el Lema 3.2.5, tenemos que $u \equiv 0$ en I y por lo tanto $x_1 \equiv x_2$ en I. □