7

Leyes de Kelpler

7.1 Sistemas Conservativos

Consideremos la ecuación

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{7.1}$$

donde f es una función continua.

Si multiplicamos a (7.1) por $\dot{x}$ e integramos obtenemos que

$$\frac{\dot{x}}{2} + F(x) = E \tag{7.2}$$

donde F es una primitiva de f y E es una constante.

Observación 7.1.1. $\frac{\dot{x}}{2}$ se denomina energía cinética y $F(x)$ energía potencial.

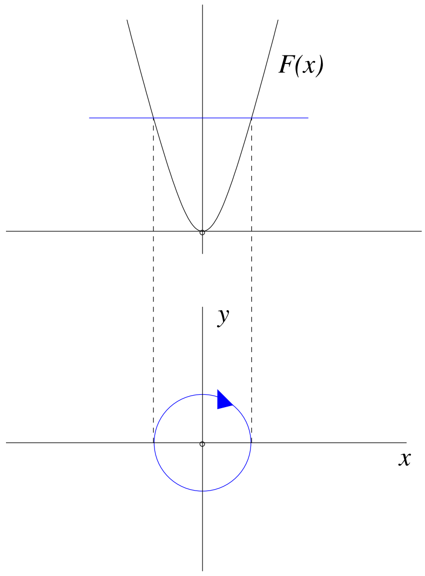
Si tomamos $(x, y) = (x, \dot{x})$, (7.2) se transforma en

$$\frac{y^2}{2} + F(x) = E$$

que describe una curva en el plano de fases.

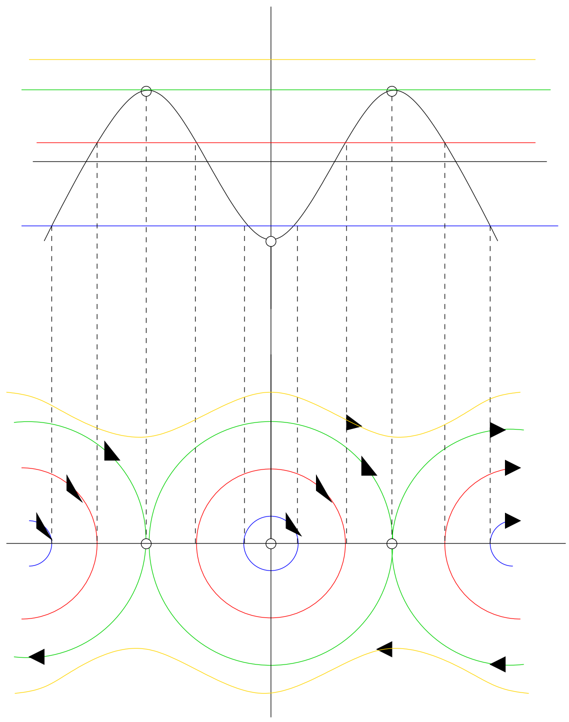
Ejemplo 7.1.2. Consideremos $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En este caso tenemos las curvas descriptas por la siguiente ecuación

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E$$



o sea circunferencias.

Ejemplo 7.1.3. Consideremos $F(x) = -k^2 \cos(x)$.



7.2 Sistemas Lineales + wxMaxima

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax \tag{7.3}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Comenzamos por cargar el paquete “diag” en maxima que nos va a permitir calcular la forma de Jordan de la matriz A.

```
(%i1) load("diag");
```

(%o1) $/usr/share/maxima/5.17.1/share/contrib/diag.mac$

Ingresemos la matriz A,

```
(%i2) A:matrix([-4,2,10],[-4,3,7],[-3,1,7]);
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculemos la forma de Jordan de A

```
(%i3) c:jordan(%);
```

(%o3) $[[2, 3]]$

para ponerla en forma matricial

```
(%i4) J:dispJordan(%);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz de cambio de base

```
(%i5) P:ModeMatrix(A,c);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

verifico

```
(%i6) (P^^-1).A.P;
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución de (7.4) es

$$x(t) = e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}x_0 = e^{2t}P\left[I + Nt + \frac{N^2}{2}t^2\right]P^{-1}x_0$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$x(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -t^2 - 6t + 1 & 2t & 2t^2 + 10t \\ -\frac{t^2+8t}{2} & t + 1 & t^2 + t \\ -\frac{t^2+6t}{2} & t & t^2 + 5t + 1 \end{pmatrix}x_0.$$

7.3 Movimiento Planetario

Supongamos que tenemos una partícula de masa m moviéndose en un plano y sujeta a una fuerza, la cual está dirigida a lo largo del segmento que une a la partícula con el origen, y la cual tiene una magnitud dependiente solamente de la distancia entre la partícula y el origen. En una situación de este tipo, diremos que tenemos una fuerza central.

Las funciones x, y, las cuales describen el camino de las partículas, satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{x}{r}F(r), \\ m\ddot{y} = \frac{y}{r}F(r), \end{cases} \tag{7.4}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $|F(r)|$ representa la magnitud de la fuerza sobre la partícula cuando está a distancia r del origen.

Para resolver (7.4), comenzamos por proponer el siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\operatorname{sen}(\varphi). \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\operatorname{sen}(\varphi), \\ \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos(\varphi) - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\operatorname{sen}(\varphi), \\ \dot{y} &= \dot{r}\operatorname{sen}(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi), \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\operatorname{sen}(\varphi) + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Utilizando (7.4), llegamos a que

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{F(r)}{m}, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Observemos que multiplicando por $\dot{r}$ a

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0,$$

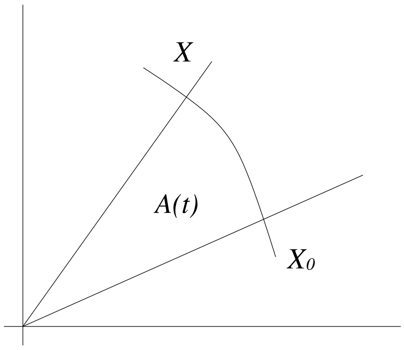
llegamos a que

$$(r^2\dot{\varphi})' = 0,$$

y por lo tanto

$$r^2\dot{\varphi} = c \quad (c = \text{constante}). \tag{7.6}$$

Observación 7.3.1. De esta última desigualdad obtenemos que



$X = (r(t), \varphi(t))$ y $X_0 = (r(t_0), \varphi(t_0))$.

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} r^2(s)\varphi(s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{c}{2}\, ds \\ &= \frac{c}{2}(t - t_0). \end{aligned}$$

Luego, si $c \neq 0$ el segmento del origen a la partícula barre igual área en igual tiempo.

Supondremos que

$$V(\varphi(t)) = \frac{1}{r(t)},$$

entonces, derivando y utilizando (7.6), resulta que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{v(\varphi(t))^2} \frac{dv}{d\varphi}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ &= -r^2\varphi(t)\frac{dv}{d\varphi}(\varphi(t)) \\ &= -c\frac{dv}{d\varphi}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= -c\frac{d^2v}{d\varphi^2}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ &= -c^2 v(\varphi(t))^2 \frac{d^2v}{d\varphi^2}(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Luego, utilizando (7.5) y (7.6), resulta que

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}(t)^2$$
$$= -c^2 v(\varphi(t))^2 \frac{d^2v}{d\varphi^2}(\varphi(t)) - cv(\varphi(t))^3.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{F(\frac{1}{v})}{mc^2v^2}.$$

De ahora en más consideraremos el caso en que $F(r) = -\frac{km}{r^2}$, donde k es una constante positiva. Entonces

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{k}{c^2},$$

o sea que

$$v(\varphi) = \frac{k}{c^2} + B\cos(\varphi - w) \quad (B, w \text{ constantes}),$$

entonces

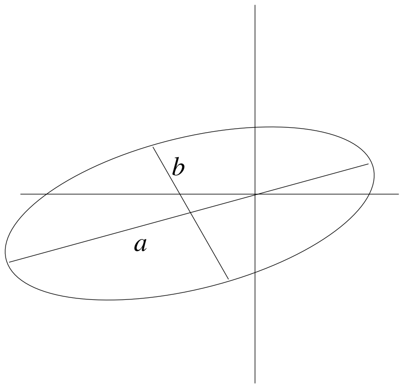
$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + e\cos(\varphi - w)} \qquad e = \frac{Bc^2}{k},$$

que resulta una cónica con excentricidad en e.

Observación 7.3.2. Notemos que si $0 \leq e < 1$ tenemos una elipse, si $e = 1$ tenemos una parábola y si $e > 1$ tenemos una hipérbola.

Supongamos que $0 \leq e < 1$.

Observemos que



$$2a = \frac{c^2}{k}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right) = \frac{2c^2}{k(1-e^2)},$$

o sea que

$$a = \frac{c^2}{k(1-e^2)},$$

y

$$b^2 = a^2(1-e^2) = \frac{c^2a}{k}.$$

Luego, teniendo en cuenta que el área de la elipse es πab, resulta que

$$\frac{1}{2}hT = A(T) = \pi ab$$

y por lo tanto

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}a^3.$$

Leyes de Kepler

1. El segmento que une al sol con un planeta barre igual área en igual tiempo.
2. Los planetas se mueven a lo largo de elipses con el sol como un foco.
3. Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los ejes de mayor distancia de las elipses.