2

Ecuaciones de Primer Orden e Intervalo Maximal

2.1 Algunos Métodos de Resolución

En general, es muy difícil resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Pero hay ciertos tipos canónicos de éstas para las cuales sí existen métodos para hallar soluciones. Por ejemplo, en la clase anterior describimos los métodos para hallar las soluciones de las ecuaciones de variables separables (ver Observación 1.1.1) y de las ecuaciones lineales de primer orden (ver Sección 1.2).

A continuación describiremos algunos métodos para otros tipos canónicos de ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.1.1 Ecuaciones Homogéneas

Una función $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado $n \in \mathbb{N}_0$ si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$g(\lambda v) = \lambda^n g(v) \quad \forall\, v \in \mathbb{R}.$$

Cuando $n = 0$ diremos solamente que g es homogénea.

Observación 2.1.1. Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces g es homogénea si y solo

$$g(x,t) = h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Definición 2.1.2. Una ecuación diferencial del tipo

$$x' = f(x,t)$$

se llama *homogénea* si la función f es homogénea.

En lo que sigue mostraremos el método que se utiliza para resolver este tipo de ecuaciones.

Consideremos la ecuación homogénea

$$x' = f(x, t). \tag{2.1}$$

Como f es homogénea, el lado derecho de la ecuación anterior puede escribirse como una función de x/t,

$$x' = f(x, t) = h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Realicemos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x}{t}.$$

Entonces

$$y' = \frac{x't - x}{t^2} = \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t^2},$$

llegando de esta manera a la ecuacón de variables separables

$$y' = \frac{h(y) - y}{t}. \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1.3. Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x^3 + t^3}{3tx^2}.$$

Comencemos por observar que $f(x, t) = \frac{x^3+t^3}{3tx^2}$ es una función homogénea, sabemos que se puede expresar como función de x/t,

$$x' = \frac{x^3 + t^3}{3tx^2} = \frac{t^3\left[\left(\frac{x}{t}\right)^3 + 1\right]}{3tx^2} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^3 + 1}{3\left(\frac{x}{t}\right)^2} = h\left(\frac{x}{t}\right),$$

donde

$$h(u) = \frac{u^3 + 1}{3u^2}.$$

Luego tomando $y = \frac{x}{t}$ y utilizando el procedimiento descripto anteriormente llegamos a que

$$y' = \frac{h(y) - y}{t} = \frac{1 - 2y^3}{3y^2}$$

entonces

$$\frac{3y^2}{1 - 2y^3}y' = \frac{1}{t}$$

e integrando a ambos lados de la última igualdad llegamos a que

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2y^3| = \ln|t| + C$$

o sea que

$$1 - 2y^3 = A\frac{1}{t^2}.$$

Por lo tanto, como $y = \frac{x}{t}$, resulta que

$$1 - 2\frac{x^3}{t^3} = \frac{1}{t^2}$$

o sea

$$x = \left(\frac{t^3 - At}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

2.1.2 Ecuaciones de Bernoulli

Definición 2.1.4. Una ecuación diferencial de la forma

$$x' = p(t)x + q(t)x^{\alpha} \tag{2.3}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, p y q funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) de $\mathbb{R}$, se conoce como *ecuación de Bernoulli*.

Observación 2.1.5. Cuando $\alpha = 0$ o 1 la ecuación (2.3) es lineal.

Para resolver una ecuación del tipo (2.3), con $\alpha \neq 0, 1$, considermos el cambio de variable $y = x^{1-\alpha}$. De esta manera resulta que

$$y' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x' = (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^{\alpha}) = (1-\alpha)\left(p(t)x^{1-\alpha} + q(t)\right),$$

por lo tanto (2.3) se reduce a la siguiente ecuación lineal

$$y' = (1-\alpha)(p(t)y + q(t)).$$

Ejemplo 2.1.6. Resolver $x' + tx = tx^{-1/2}$.

Sea $y = x^{1-(-1/2)} = x^{3/2}$ entonces

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2}x' = \frac{3}{2}x^{1/2}\left(tx^{-1/2} - tx\right) = \frac{3}{2}\left(t - tx^{3/2}\right)$$

y por lo tanto tenemos la siguiente ecución lineal

$$y' = -\frac{3}{2}ty + \frac{3}{2}t.$$

Para resolver esta ecuación, utilizamos la fórmula de variación de las constantes (ver (1.8)), en este caso

$$p(t) = -\frac{3}{2}t$$
$$q(t) = \frac{3}{2}t$$
$$T(t,s) = e^{\int_s^t -\frac{3}{2}z\,dz} = e^{-\frac{3}{4}(t^2 - s^2)}$$
$$\int T(t,s)q(s)\,ds = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{4}t^2}\int e^{\frac{3}{4}s^2}s\,ds = 1.$$

Entonces

$$y = e^{-\frac{3}{4}t^2}C + 1$$

y por lo tanto

$$x^{3/2} = e^{-\frac{3}{4}t^2}C + 1.$$

2.1.3 Ecuaciones Exactas

Ahora consideraremos ecuaciones diferenciales de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.4}$$

donde $M, N\colon \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$. Supondremos que M y N son dos funciones de clase C^1 y $N(x,y) \not\equiv 0$ en Ω. Entonces dividiendo por $N(x,y)dx$ y resulta que la equación (2.4) se transforma en

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

para la cual tenemos una teoría de existencia y unicidad para el problema de valores iniciales.

Definición 2.1.7. Diremos que la ecuación (2.4) es exacta si el campo vectorial (M, N) es un campo conservativo, es decir, existe una función $H : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla H = (M, N)$.

Si la ecuación (2.4) es exacta entonces se puede rescribir de la siguiente manera

$$H_x(x,y) + H_y(x,y)y' = 0, \tag{2.5}$$

donde H_x y H_y denotan las derivadas parciales de H con respecto a x e y respectivamente.

Luego, si $y(x)$ es una solución de (2.4), obtenemos de (2.5) que

$$\frac{d}{dx}H(x, y(x)) = 0$$

o sea, $y(x)$ es solución de la ecuación

$$H(x, y(x)) = C$$

donde C es una constante.

Observación 2.1.8. Observar que la ecuación (2.4) puede ser exacta sin que M y N sean C^1. Pero, si M y N son C^1 en un dominio simplemente conexo, la condición para que la ecuación (2.4) sea exacta es que $M_y = M_x$.

Ejemplo 2.1.9. Considere la ecuación

$$(2xy + 1)dx + (x^2 + 4y)dy = 0. \tag{2.6}$$

En este caso $M(x,y) = 2xy + 1$ y $N = x^2 + 4y$ son dos funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y como $M_y(x,y) = 2x = N_x(x,y)$ la ecuación (2.6) es exacta. Entonces existe una función $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla H = (M,N)$. Calculemos H,

$$H(x,y) = \int (2xy+1)\,dx + g(y) = x^2y + x + g(y),$$

donde g es una función de clase C^2 que sólo depende de y. Por otro lado

$$x^2 + 4y = N(x,y) = H_y(x,y) = x^2 + g'(y)$$

entonces

$$g'(y) = 4y$$

o sea que $g(y) = 2y^2$ y por lo tanto $H(x,y) = x^2y + x + 2y^2$. Por lo tanto, las soluciones $y(x)$ de (2.6) satisface que

$$x^2y + x + 2y^2 = C$$

donde C es una constante arbitraria.

2.1.4 Factores Integrantes

Supongamos ahora que se tiene una ecuación de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

no es exacta. ¿Cuándo se puede transformar la ecuación en exacta? Es decir, ¿ Cuándo existe una función $\mu(x,y)$ tal que la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

sea exacta?

Suponiendo que M y N son de clase C^1, lo que buscamos es una función μ tal que

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

o sea que

$$M\mu_y + \mu M_y = N\mu_x + \mu N_x. \tag{2.8}$$

Definición 2.1.10. Una función μ que satisface la ecuación (2.8) se denomina un *factor integrante* para la ecuación (2.7).

En la práctica es muy dificíl hallar un factor integral, ya que debemos resolver la ecuacion en derivadas parciales (2.8). Ahora bien, no necesitamos hallar la solución general de (2.8) sino cualquier solució particular. Supongamos, por ejemplo, que la ecuacion (2.7) acepta un factor integrante que únicamente depende de x, entonces la ecuación (2.8) queda de la siguiente manera

$$\mu M_y = N\mu' + \mu N_x \tag{2.9}$$

entonces

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{(M_y - N_x)}{N}$$

luego como $\frac{\mu'}{\mu}$ depende sólo de x tenemos que

$$\frac{(M_y - N_x)}{N} = g(x)$$

y entonces

$$\frac{d}{dx} \ln \mu = g(x)$$

y por lo tanto

$$\ln \mu = \int g(x)\, dx.$$

Notar que no le sumamos una constante al lado derecho de la última igualdad ya que sólo estamos interesados en hallar una solución de (2.9).

Concluímos que

$$\mu = e^{\int g(x)\, dx}. \tag{2.10}$$

Por último, observemos que si

$$\frac{(M_y - N_x)}{N}$$

es una funcón que sólo depende de x, digamos que

$$\frac{(M_y - N_x)}{N} = g(x)$$

entonces (2.10) da una función μ que depende sólo de x y resulta un factor integrante para la ecuación (2.7).

Ejemplo 2.1.11. Hallar un factor integrante para la ecuación

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0. \tag{2.11}$$

En este caso $M(x, y) = y$ y $N(x, y) = x^2y - x$ y como $M_y = 1$ y $N_x = 2xy - 1$ son distintas, la ecuación no es exacta. Observemos que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2xy - 2}{x^2 - y} = -\frac{2}{x}$$

que sólo depende de x. Entonces

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\, dx} = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante para (2.11).

2.2 Intervalo Maximal

A continuación daremos algunos ejemplos donde discutiremos acerca del intervalo maximal asociado a un problema de valores iniciales.

Ejemplo 2.2.1. (a) Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = -3x^{4/3}\sin(t), \\ x(\frac{\pi}{2}) = 8. \end{cases}$$

Comencemos por observar que la ecuación es de varibles separables. Para resolverlo procedemos como sigue,

$$x' = -3x^{4/3}\sin(t)$$

entonces

$$\frac{x'}{x^{4/3}} = -3\sin(t)$$

e integrando a ambos lado de la última igualdad

$$-3x^{-1/3} = 3\cos(t) + C$$

donde C es una constante arbitraria, entonces

$$x^{-1/3} = C - \cos(t). \tag{2.12}$$

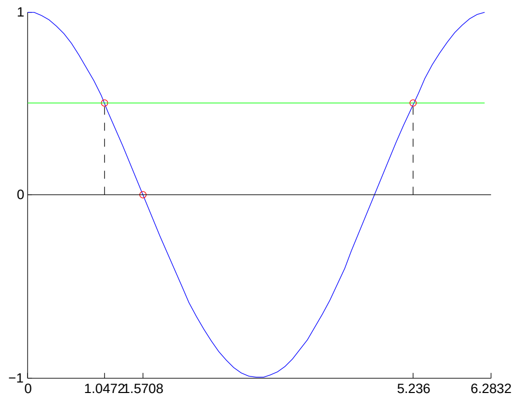
Ahora usemos el dato, $x(\frac{\pi}{2}) = 8$,

$$\frac{1}{2} = x\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/3} = C$$

por lo tanto

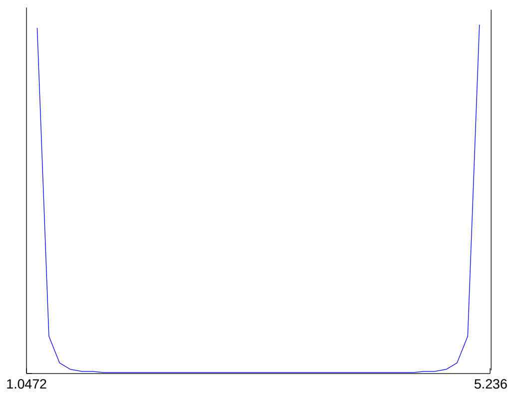
$$x(t) = \left(\frac{1}{2} - \cos(t)\right)^{-3}.$$

Para decidir cuál es el intervalo maximal asociado a la solución, consideramos el intervalo más grande que contiene a $\frac{\pi}{2}$ en el cual $\frac{1}{2} - \cos(t) \neq 0$.



Entonces el intervalo maximal asociado a la solución es

$$I = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right).$$



(b) Ahora estudiemos la misma ecuación con otros datos inicales

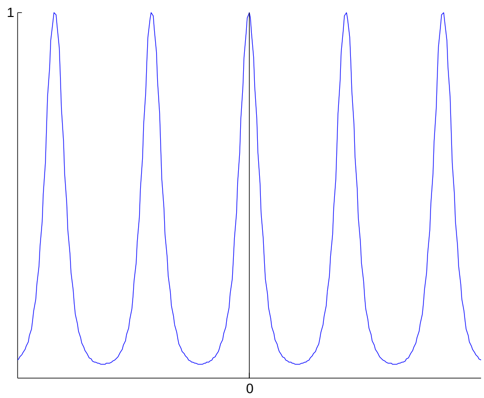
$$\begin{cases} x' = -3x^{4/3}\sin(t), \\ x(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Usando (2.12) y el dato $x(\frac{\pi}{2}) frac18$ resulta que la solución a nuestro problema es

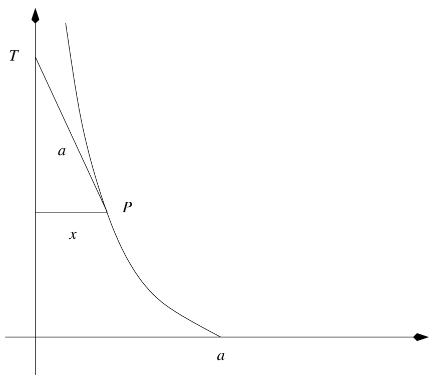
$$x(t) = \frac{1}{(2-\cos(t))^3},$$

y en este caso el intervalo maximal asociado a la solución es

$$I = (-\infty, +\infty).$$



Ejemplo 2.2.2. Un punto P es arrastrado por el plano xy mediante una cuerda PT de longitud a. Si T arranca del origen y se mueve a lo largo del eje y positivo y si P arranca en el punto $(a, 0)$ ¿ Cuál es la trayectoria de P?



Sea $y(x)$ la funcón que describe la trayectoria del punto $P = (x, y)$. Sabemos que la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función y en el punto $(x, y(x))$ $(0 < x \leq a)$ tiene la siguiente ecuación

$$\mathcal{L} : y'(x)(t - x) + y(x).$$

Además, tenemos que $(0, T) \in \mathcal{L}$, entonces

$$y' = \frac{y - T}{x} = -\frac{\sqrt{a - x^2}}{x}.$$

Luego llegamos al siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = -\frac{\sqrt{a - x^2}}{x}, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Observar que, del planteo que hicimos del problema, tenemos que $x \in (0, a]$.

La resolución de la ecuación diferencial es muy sencilla ya que es una ecuación de variables separadas.

$$y(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

El intervalo maximal asociado es

$$I = (0, a].$$

Ejemplo 2.2.3. Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = |y|^{1/2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Comencemos por observar que la funcón $f(y, x) = |y|^{1/2}$ no es Lipschitz. Podemos encontrar más de una solución, por ejemplo

$$y \equiv 0$$

o

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

o

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{4} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En cualquiera de los tres casos el dominio de la función es

$$I = (-\infty, +\infty).$$

Ejemplo 2.2.4 (Modelos Poblacionales)**.** Denótese por $p(t)$ la población de una especie dada en el tiempo t. Si esta población está aislada, es decir, si no existe emigración o imigración, entonces

$$\frac{p'(t)}{p(t)}$$

es la tasa de variación o crecimiento.

En el modelo más simple se supone que

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = \alpha$$

donde α es una constante. Si suponemos estar en este modelo y que a tiempo 0 la cantidad de población era p_0, tenemos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} p' = \alpha p. \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

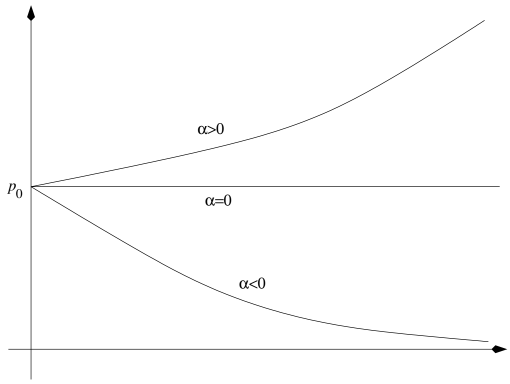
La solución de este problema, como ya vimos, es

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t},$$

y el intervalo maximal asociado es $I = (-\infty, +\infty)$, pero teniendo en cuenta el planteo del problema tomamos $I = (0, +\infty)$.

Observemos que

- Si $\alpha = 0$ entonces $p \equiv p_0$.
- Si $\alpha < 0$ entonces $p \searrow 0$ cuando $t \to +\infty$ y por lo tanto la población se extingue.
- Si $\alpha > 0$ entonces $p \nearrow 0$ cuando $t \to +\infty$ y por lo tanto la población crece de manera ilimitada.



Conideremos ahora un modelo un poco más complicado.

Crecimiento Limitado. En este caso lo que supondremos para modelar el crecimiento poblacional es que al llegar a una cantidad de población la tasa de población empieza a decrecer. O sea vamos a considerar el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} p' = \Gamma(p,t)p \\ p(0) = p_0. \end{cases}$$

donde $\Gamma(p,t)$ es tal que existe $\xi > 0$ de manera que $\Gamma(p,t) < 0$ si $p > \xi$.

Tenemos infinidad de funciones que cumplen esto. Vamos a tomar, como ejemplo, la función

$$\Gamma(p,t) = \beta(\xi - p)$$

donde β es una constante positiva. Entonces nuestro problema de valores iniciales es el siguiente

$$\begin{cases} p' = \beta(\xi - p)p = (\alpha - \beta p)p \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde $\alpha = \beta\xi$.

Obesrevemos que

- si $p_0 = \xi$ entonces $p \equiv \xi$,
- si $p_0 \not\equiv 0$ entonces no existe un t_0 tal que $p(t_0) = \xi$ y que si existiera p sería una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} p' = \beta(\xi - p)p = (\alpha - \beta p)p \\ p(t_0) = \xi, \end{cases}$$

  y por lo tanto $p \equiv \xi$ lo que sería una contradicción al hecho de que $p(0) = p_0 \not\equiv \xi$.

Supondremos, entonces que $p_0 \not\equiv \xi$, luego

$$\alpha - \beta p(t) \not\equiv 0 \quad \forall t.$$

Entonces

$$p' = (\alpha - \beta p)p$$

implica

$$\frac{p'}{(\alpha - \beta p)p} = 1$$

e integremos ambos lados de la igualdad entre 0 y t

$$\int_0^t \frac{p'(s)}{(\alpha - \beta p(s))p(s)}\, ds = t.$$

Consideremos el cambio de variables $u = p(s)$ entonces $du = p'(s)ds$ y

$$t = \int_0^t \frac{p'(s)}{(\alpha - \beta p(s))p(s)}\, ds = \int_{p_0}^{p(t)} \frac{du}{(\alpha - \beta u)u}.$$

entonces

$$\frac{1}{\alpha} \ln\left(\left|\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)}\right|\right) - \frac{1}{\alpha} \ln\left(\left|\frac{p_0}{\alpha - \beta p_0}\right|\right) = t$$

por lo tanto

$$\left|\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)}\right| = \left|\frac{p_0}{\alpha - \beta p_0}\right| e^{\alpha t}.$$

Como

$$\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)} \not\equiv 0$$

resulta que

$$\frac{p(t)}{\alpha - \beta p(t)} \quad \text{y} \quad \frac{p_0}{\alpha - \beta p_0}$$

tienen el mismo signo y por lo tanto

$$p(t) = \frac{p_0}{\alpha - \beta p_0}(\alpha - \beta p(t))e^{\alpha t}$$

o sea que

$$p(t) = \frac{p_0\xi}{p_0 + (\xi - p_0)}e^{-\xi\beta t} \quad \forall t \geq 0.$$

Observar que si uno mira el problema de valores iniciales (2.13) olvidándose del contexto, el intervalo maximal es $I = (-\infty, +\infty)$.

Analicemos el comportamiento de p en función de p_0

- si $p_0 = \xi$ entonces $p \equiv \xi$,
- si $p_0 > xi$ entonces $p \searrow \xi$ cuando $t \to \infty$,
- si $p_0 < xi$ entonces $p \nearrow \xi$ cuando $t \to \infty$.