6

Ecuaciones diferenciales de Segundo Orden (Segunda Parte)

Nuestro próximo objetivo es mostrar un método para obtener soluciones particulares de ecuaciones de segundo orden no homogéneas.

6.1 Obtención de una solución particular

Sean p, q y f funciones continuas. Consideraremos el siguiente problema

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t). \tag{6.1}$$

Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones l.i. de

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{6.2}$$

El método de variación de las constantes consiste en buscar funciones α_1 y α_2 tales que

$$x(t) = \alpha_1(t)\varphi_1(t) + \alpha_1(t)\varphi_1(t)$$

sea una solución de (6.1).

Comencemos por calcular las derivadas de $x(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\alpha}_1\varphi_1 + \dot{\alpha}_2\varphi_2 + \alpha_1\dot{\varphi}_1 + \alpha_2\dot{\varphi}_2\\ \ddot{x} &= \ddot{\alpha}_1\varphi_1 + \ddot{\alpha}_2\varphi_2 + 2(\dot{\alpha}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\varphi}_2) + \alpha_1\ddot{\varphi}_1 + \alpha_2\ddot{\varphi}_2\end{aligned}$$

Usando que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de (6.2) tenemos que $x(t)$ es una solución de (6.2) si y sólo si

$$f(t) = \ddot{\alpha}_1\varphi_1 + \ddot{\alpha}_2\varphi_2 + 2(\dot{\alpha}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\varphi}_2) + p(t)(\dot{\alpha}_1\varphi_1 + \dot{\alpha}_2\varphi_2)$$

Vamos a pedir que

$$\dot{\alpha}_1\varphi_1 + \dot{\alpha}_2\varphi_2 = 0$$

y por lo tanto $x(t)$ es una solución de (6.2) si

$$\dot{\alpha}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha}_2\dot{\varphi}_2 = f(t).$$

O sea que tenemos el siguiente problema

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2 & -\varphi_2 \\ -\dot{\varphi}_1 & \varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(t) &= -\frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\varphi_2(t), f(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) &= \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\varphi_1(t)f(t) \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\displaystyle\int \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\varphi_2(t), f(t)\, dt \\ \alpha_2(t) = \displaystyle\int \frac{1}{W(\varphi_1,\varphi_2)(t)}\varphi_1(t)f(t)\, dt \end{cases} \tag{6.3}$$

Ejemplo 6.1.1. Hallar una solución particular de

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^t.$$

Comencemos por resolver la ecuación homogénea asociada

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0. \tag{6.4}$$

La ecuación auxiliar en este caso es

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

Las raíces son 2 y 3. Entonces la solución general de (6.4) es

$$x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t}.$$

Ahora hallaremos una solución particular de nuestro problema utilizando (6.3). Comencemos por calcular el Wronskiano de e^{2t}, e^{3t}

$$W = \det\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} = e^{5t}.$$

Entonces tomando

$$\alpha_1 = -\int \frac{1}{e^{5t}}e^t e^{3t}\, dt = -\int e^{-t}\, dt = e^{-t} + C_1$$

$$\alpha_2 = \int \frac{1}{e^{5t}} e^t e^{2t}\, dt = \int e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} + C_2$$

Tomando, por ejemplo, $C_1 = C_2 = 0$ tenemos que

$$x_p(t) = e^{-t} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} e^{3t} = \frac{1}{2} e^t.$$

Observación 6.1.2. Sean p y q constantes y estudiando el problema de hallar una solución particular de

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t),$$

podemos observar que si

- Si $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ entonces $x_p = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n$ es una solución particular.
- Si $f(t) = e^{\alpha t}$ entonces $x_p = b e^{\alpha t}$ es una solución particular.
- Si $f(t) = \cos(\beta t)$ o $\operatorname{sen}(\beta t)$ entonces $x_p = b\cos(\beta t) + c\operatorname{sen}(\beta t)$ es una solución particular.

Ejemplo 6.1.3. Consideremos el problema de hallar una solución particular del siguiente problema

$$\ddot{x} + x = \cos(t).$$

Si aplicásemos lo observado anteriormente propondríamos una solución de la forma $b\cos(t) + c\operatorname{sen}(t)$. El problema es que, en este caso, $b\cos(t) + c\operatorname{sen}(t)$ es una solución de problema homogéneo asociado. Propondremos como solución particular

$$x_p(t) = b_1 t\cos(t) + b_2 t\operatorname{sen}(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p &= b_1\cos(t) + b_2\sin(t) + t(b_2\cos(t) - b_1\operatorname{sen}(t)) \\
\ddot{x}_p &= 2(b_2\cos(t) - b_1\operatorname{sen}(t)) - t(b_1\cos(t) + b_2\operatorname{sen}(t)) \\
&= 2(b_2\cos(t) - b_1\operatorname{sen}(t)) - x_p
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\ddot{x}_p + x_p = \cos(t)$$

si y sólo si

$$2(b_2\cos(t) - b_1\operatorname{sen}(t)) = \cos(t).$$

De lo que se deduce que $b_1 = 0$ y $b_2 = \frac{1}{2}$. Luego

$$x_p(t) = \frac{1}{2} t\operatorname{sen}(t)$$

es una solución particular de nuestro problema.

6.2 Solución en Series de Potencias

Ejemplo 6.2.1. Encontrar 2 soluciones l.i. de

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = 0 \tag{6.5}$$

Propondremos como solución que admite un desarrollo en series de potencias o sea consideraremos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Derivemos

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

y

$$\ddot{x} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Entonces

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n t^n$$

y por lo tanto $\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = 0$ si y sólo si

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n\} t^n + 2(a_2 + a_0),$$

o lo que es lo mismo si y sólo si

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto todos los coeficientes $\{a_n\}$ quedan determinados de manera única, una vez que se asignen valores para a_0 y a_1.

Observación 6.2.2. Si $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ entonces $x(0) = a_0$ y $\dot{x}(0) = a_1$. Esto nos indica que a_0 y a_1 tienen que ser arbitarías.

Para encontrar dos soluciones de (6.5) l.i. consideramos los siguientes casos

(i) $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$;

(ii) $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

(i)

$$\begin{aligned} a_0 \quad &\rightarrow \quad a_2 = 1 \\ &\rightarrow \quad a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{1}{2} \\ &\rightarrow \quad a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \quad a_{2n} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

y

$$a_1 = 0 \rightarrow a_{2n+1} = 0.$$

Entonces

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{2n} = e^{t^2}.$$

(i)

$$a_0 = 0 \rightarrow a_{2n} = 0.$$

$$\begin{aligned} a_1 = 1 \quad &\rightarrow \quad a_3 = \frac{2a_1}{a_3} = \frac{2}{3} \\ &\rightarrow \quad a_5 = \frac{2a_3}{5} = \frac{4}{5 \cdot 3} \\ &\rightarrow \quad a_7 = \frac{2a_5}{5} = \frac{8}{7 \cdot 5 \cdot 3} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{2^n t^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Observemos que el radio de convergencia de x_1 y x_2 es ∞.

Teorem 6.2.3. *Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y supongamos que p y q son dos funciones que tienen un desarrollo en series de potencias de $(t - t_0)$ convergente sobre el intervalo*

$$|t - t_0| < r_0 \quad (r_0 > 0).$$

Sean $a_0, a_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Probar que existe una solución ϕ del problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \\ x(t_0) = a_0 \quad \dot{x}(t_0) = a_1 \end{cases}$$

con una expansión en series de potencias

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k.$$

convergente en $|t - t_0| < r_0$.