5

Ecuaciones diferenciales de Segundo Orden

5.1 Introducción

Sean $p, q, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en el intervalo abierto (a, b), el cual puede ser finito o infinito. En esta clase consideraremos la siguiente *ecuación lineal de segundo orden*

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t). \tag{5.1}$$

Nuestro primer resultado es sobre la existencia y unicidad de la solución

Teorem 5.1.1. *Sean p, q y f funciones continuas en (a, b). Si t_0 es cualquier punto en (a, b) y si x_0, v_0 son números arbitrarios, entonces el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

tiene una y sólo una solución $x(t)$ en (a, b).

Demostración. Ejercicio. □

Si $f \equiv 0$ en (a, b), la ecuación (5.1) se reduce a la *ecuación homogénea*

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{5.3}$$

Supongamos que por algún medio sabemos que $x_h(t, \alpha_1, \alpha_2)$ es la solución general de (5.3) (esperamos que contenga dos constantes arbitrarias por ser de segundo orden la ecuación) y que $x_p(t)$ es una solución particular de (5.1). Si $x(t)$ es una solución cualquiera de (5.1), entonces $u(t) = x(t) - x_p(t)$ es una solución de (5.3),

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + p(t)\dot{u}(t) + q(t)u(t) &= \ddot{x}(t) - \ddot{x}_p(t) + p(t)\left(\dot{x} - \dot{x}_p(t)\right) + q(t)\left(x(t) - x_p(t)\right) \\ &= \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) - \left(\ddot{x}_p(t) + p(t)\dot{x}_p(t) + q(t)x_p(t)\right) \\ &= f(t) - f(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $x_h(t,\alpha_1,\alpha_2)$ es la solución general de (5.3) resulta que

$$u = x_h(t,\alpha_1,\alpha_2)$$

o lo que es lo mismo

$$x(t) = x_h(t,\alpha_1,\alpha_2) + x_p(t)$$

para alguna elección apropiada de las constantes α_1 y α_2.

Luego para resolver (5.1) procederemos de la siguiente manera:

1. Hallaremos la solución general de (5.3);
2. Buscaremos una solución particular de (5.1).

5.2 La Solución General de la Ecuación Homogénea

Lo primera que podemos observar acerca de la ecuación homogénea (5.3) es que admite como solución a la función $x \equiv 0$ en (a,b). Además, el conjunto formado por todas las soluciones de (5.3) es un espacio vectorial.

Teorem 5.2.1. *Si x_1 y x_2 son dos soluciones cualesquiera de* (5.3)*, entonces*

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

también es solución para todo par de constantes α_1 y α_2.

Demostración. Sea $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ donde α_1 y α_2 son constantes, entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) &= \alpha_1 \ddot{x}_1(t) + \alpha_2 \ddot{x}_2(t) + p(t)(\alpha_1 \dot{x}_1(t) + \alpha_2 \dot{x}_2(t)) + q(t)(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) \\
&= \alpha_1 (\ddot{x}_1(t) + p(t)\dot{x}_1(t) + q(t)x_1(t)) + \alpha_2 (\ddot{x}_2(t) + p(t)\dot{x}_2(t) + q(t)x_2(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema. □

Observemos que, dado $t_0 \in (a,b)$, por el Teorema 5.1.1, los siguientes problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(t_0) = 1, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 1, \end{cases}$$

tienen una única solución, ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, en el intervalo (a,b).

Sabemos que

$$x(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t),$$

donde α_1 y α_2 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación diferencial (5.3).

Más aún,

Proposición 5.2.2. *Si x es una solución de (5.3) entonces existen α_1 y α_2 constantes tal que*

$$x(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t) \quad \forall\ t \in (a, b).$$

Demostación. Sea x una solución de (5.3), y tomemos $\alpha_1 = x(t_0)$ y $\alpha_2 = \dot{x}(t_0)$. Entonces

$$y = x - \alpha_1\phi_1 - \alpha_2\phi_2$$

es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Luego, por el Teorema 5.1.1 $y \equiv 0$, en (a, b). □

Entonces, podemos observar que el espacio de soluciones de (5.3) está generado por ϕ_1 y ϕ_2. Es más, $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base del espacio de soluciones.

Nuestro próximo objetivo es construir algún criterio que nos permita decidir cuándo dos soluciones de (5.3) son linealmente independientes. Comencemos por recordar las noción de independencia lineal.

Definición 5.2.3. Si dos funciones x_1 y x_2 están definidas sobre el intervalo (a, b) y una de ellas es un múltiplo de la otra, se dice que son *linealmente dependientes* (l.d.) sobre (a, b). En caso contrario se dice que son *linealmente independientes* (l.i.).

La noción de dependencia (o independencia) de las funciones derivables puede asociarse con el determinante Wronskiano.

Definición 5.2.4. Dadas dos funciones derivables $x_1, x_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$, el determinante

$$W(x_1, x_2)(t) = \det\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

se dice el *Wronskiano* de x_1 y x_2.

Lema 5.2.5. *Sean $x_1, x_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables, tales que existe $t_0 \in (a, b)$ para el cual $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Entonces, x_1 y x_2 son l.i.*

Demostración. Supongamos por contradicción, que x_1 y x_2 son l.d.. Entonces existen constantes α_1 y α_2 distintas de cero tales que

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha x_2(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

Y derivando

$$\alpha_1 \dot{x}_1(t) + \alpha \dot{x}_2(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

En particular

$$\alpha_1 x_1(t_0) + \alpha x_2(t_0) = 0,$$
$$\alpha_1 \dot{x}_1(t_0) + \alpha \dot{x}_2(t_0) = 0.$$

El determinante de este sistema es, por hipótesis, $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, lo cual es una contradicción. □

Observación 5.2.6. La recíproca no vale. Por ejemplo las funciones $x_1(t) = t^3$ y $x_2 = |t|^3$ son l.i. y su Wronskiano es 0.

Teorem 5.2.7. *Sean x_1 y x_2 dos soluciones de (5.3). Entonces, las soluciones son l.i. si y sólo si existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Además, si el $W(x_1, x_2)$ es diferente de cero en un punto $t_0 \in (a, b)$ entonces $W(x_1, x_2) \neq 0$ en (a, b).*

Demostración. Comencemos por ver que si x_1 y x_2 son l.i. entonces existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. En realidad vamos a probar un poco más: $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Sea $t_0 \in (a, b)$ y probemos que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Supongamos que no, entonces el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) & = 0 \\ \alpha_1 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_2 \dot{x}_2(t_0) & = 0 \end{cases}$$

tiene solución (α_1, α_2) no trivial. Tomemos

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t).$$

Observemos que x es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(t_0) = 0 \quad \dot{x}(t_0) = 0, \end{cases}$$

y por el Teorema 5.1.1 resulta que $x \equiv 0$ en (a, b). Esto implica que x_1 y x_2 son l.d. lo que es una contradicción.

La recíproca es una consecuencia del Lemma 5.2.5.

La última afirmación del teorema se prueba de la siguiente manera. Si el Wronskiano es diferente de cero, en un punto, entonces x_1 y x_2 son l.i, lo que vimos que implica que el Wronskiano es no nulo en todo (a, b). □

Por último,

Teorem 5.2.8. *Sean $x_1, x_2 : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos soluciones l.i. de (5.3). Entonces, cualquier solución x de (5.3) es de la forma*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

donde α_1 y α_2 son constantes escogidas convenientemente.

Demostración. Sea $t_0 \in (a,b)$ fijo y consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) &= x(t_0)\\ \alpha_1 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_2 \dot{x}_2(t_0) &= \dot{x}(t_0).\end{aligned}$$

Observemos que el determinante de este sistema es $W(x_1,x_2)(t_0) \neq 0$, puesto que x_1 y x_2 son l.i.. Entonces el sistema tiene solución única. Tomando

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t),$$

resulta que y es solución de (5.3) y $y(t_0) = x(t_0)$ y $\dot{y}(t_0) = \dot{x}(t_0)$. Por el Teorema 5.1.1 resulta que $y = x$ en (a,b). □

5.3 Ecuaciones Lineales con Coeficientes Constantes

Comenzaremos por mostrar el método para construir la solución general de una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad p,q = \text{constantes}. \tag{5.4}$$

Por el Teorema 5.1.1 las soluciones de (5.4) están definidas en $\mathbb{R}$.

Vamos a plantear dos maneras distintas para hallar la solución general de (5.4), la primera es considerar soluciones de la forma

$$x(t) = e^{mt}.$$

Entonces si x es una solución de (5.4) resulta que

$$\begin{aligned}0 &= \ddot{x} + p\dot{x} + qx\\ &= m^2 e^{mt} + pme^{mt} + qe^{mt}\\ &= \left(m^2 + pm + q\right)e^{mt},\end{aligned}$$

y como $e^{mt} \neq 0$ en $\mathbb{R}$ podemos concluir que x es una solución de (5.4) si y sólo si

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{5.5}$$

La ecuación anterior se conoce como la *ecuación auxiliar* de la ecuación (5.4). Para hallar las soluciones de (5.4) tenemos que estudiar las raíces de la ecuació auxiliar.

Otra manera de hallar las soluciones de (5.4) es plantear el siguiente sistema

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -py - qx\end{cases} \tag{5.6}$$

Para hallar las soluciones de este sistema, basicamente tenemos que proceder de la siguiente forma:

1. Halla los autovalores de la matriz asociada a (5.6).
2. Hallar los autovectores de la matriz asociada a (5.6).

En este caso la matriz asociada a (5.6) es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

y por lo tanto sus autovalores son las soluciones de

$$\begin{aligned} \det(mId - A) &= \det\begin{pmatrix} m & -1 \\ q & m+p \end{pmatrix} \\ &= m^2 + pm + q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nuevamente el problema pasa por hallar las raíces de la ecuación auxiliar asociada a (5.4).

Para hacer un estudio más específico de las soluciones de (5.4) consideraremos el último planteo y diferenciaremos en tres casos los cuales dependerán del signo de discriminante $\Delta = p^2 - 4q$.

Caso 1: $\Delta > 0$.

En este caso (5.5) admite dos raíces reales distintas m_1 y m_2. O sea que A tiene dos autovalores distintos y entonces la solución general de (5.6) es

$$(x, y) = c_1 e^{m_1 t} v_1 + c_2 e^{m_2 t} v_2$$

donde v_1 y v_2 son los autovalores de A asociados a m_1 y m_2 respectivamente. Por lo tanto la solución general de (5.4) es

$$x = \alpha_1 e^{m_1 t} + \alpha_2 e^{m_2 t}.$$

Caso 2: $\Delta = 0$.

En este caso (5.5) sólo tiene una raíz, o sea que solo obtenemos un autovalor

$$m = -\frac{p}{2}.$$

y un solo autovector

$$v = \left(1, -\frac{p}{2}\right).$$

Por lo tanto

$$e^{mt} v$$

es una solución de (5.6).

Para hallar otra solución que resulte l.i. con la anterior, procedemos de la siguiente manera, buscamos un vector w de manera que

$$(x, y) = (w + tv)e^{mt}$$

sea una solución de (5.6).

Observemos que

$$(\dot{x}, \dot{y}) = m(w + tv)e^{mt} + ve^{mt}$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= A(w + tv)^T e^{mt} \\ &= (Aw^T + mtv)e^{mt} \end{aligned}$$

si y sólo si

$$(mw + v)^T = Aw^T$$

o sea si y sólo si

$$(A - mId)w^T = v^T.$$

Por ejemplo podemos tomar

$$w = (0, 1).$$

De esta manera tenemos que

$$ve^{mt} \quad \text{y} \quad (w + tv)e^{mt}$$

son dos soluciónes l.i. de (5.6). Por lo tanto

$$(x, y) = c_1 ve^{mt} + c_2(w + tv)e^{mt}$$

es la solución general de (5.6). Luego

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2 t)\, e^{mt}$$

es la solución general de (5.4).

Caso 3: $\Delta < 0$.

En este caso, la ecuación (5.5) tiene dos raíces complejas y por lo tanto los autovalores asociados al sistema son

$$m_1 = -\mu + i\nu \quad \text{y} \quad m_2 = -\mu - i\nu,$$

donde

$$\mu = \frac{p}{2} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}.$$

Luego la solución general de (5.6) es

$$(x, y) = e^{-\mu t}\left[(c_1\cos(\nu t) + c_2\operatorname{sen}(\nu t))\, v_1 + (c_2\cos(\nu t) - c_1\operatorname{sen}(\nu t))\, v_2\right]$$

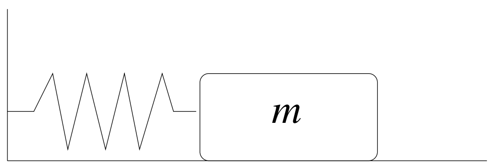
donde v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}^2$ y $v_1 + iv_2$ es el autovalor asociado al autovalor m_1. Por lo tanto la solución general de (5.4) es, en este caso,

$$x(t) = (\alpha_1\cos(\nu t) + \alpha_2\operatorname{sen}(\nu t))\, e^{-\mu t}.$$

A continuación daremos algunos ejemplos donde se aplica lo estudiado en esta sección.

5.4 Oscilador Armónico

Consideremos un cuerpo de masa m sujeto por un resorte a un muro



El resorte no ejerce fuerza cuando el cuerpo se encuentra en posición de equilibrio $x = 0$, pero si se desplaza una distancia x, el resorte ejerce una fuerza restauradora $-kx$, donde k es una constante positiva. Entonces tendremos que

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{5.7}$$

o lo que es lo mismo

$$\ddot{x} + a^2 x = 0 \tag{5.8}$$

donde $a^2 = \frac{k}{m}$. El sistema asociado a esta ecuación lineal de segundo orden es

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a^2 x. \end{cases} \tag{5.9}$$

o sea que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ahora calcularemos los autovalores y autovectores de la matriz asociada a este sistema.

wxMaxima 5.4.1. Comencemos por definir en el programa a la matriz asociada al sistema (5.9).

```
(%i1) A: matrix([0,1], [-a^2,0]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular los autovalores y autovectores asociados a A se utilizan los comandos eigenvalues y eigenvectors respectivamente.

```
(%i2) eigenvalues(%);
```

(%o2) $$[[-i\,a, i\,a], [1, 1]]$$

Los autovalores de A son complejos ($-ai$ y ai

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

(%o3) $$[[[-i\,a, i\,a], [1, 1]], [1, -i\,a], [1, i\,a]]$$

Luego la solución general de (5.9) es

$$(x, y) = (c_1 \cos(at) + c_2 \operatorname{sen}(at))(1, 0) + (c_2 \cos(at) - c_1 \operatorname{sen}(at))(0, a). \tag{5.10}$$

Antes de continuar utilicemos el wxMAxima para gráficar el campo de direcciones y la representación de las curvas integrales.

wxMaxima 5.4.2. Primero cargamos el comando que nos permitirá hacer esto.

```
(%i4) load("plotdf");
```

(%o4) $$/usr/share/maxima/5.17.1/share/dynamics/plotdf.lisp$$

Luego definimos una función auxiliar.

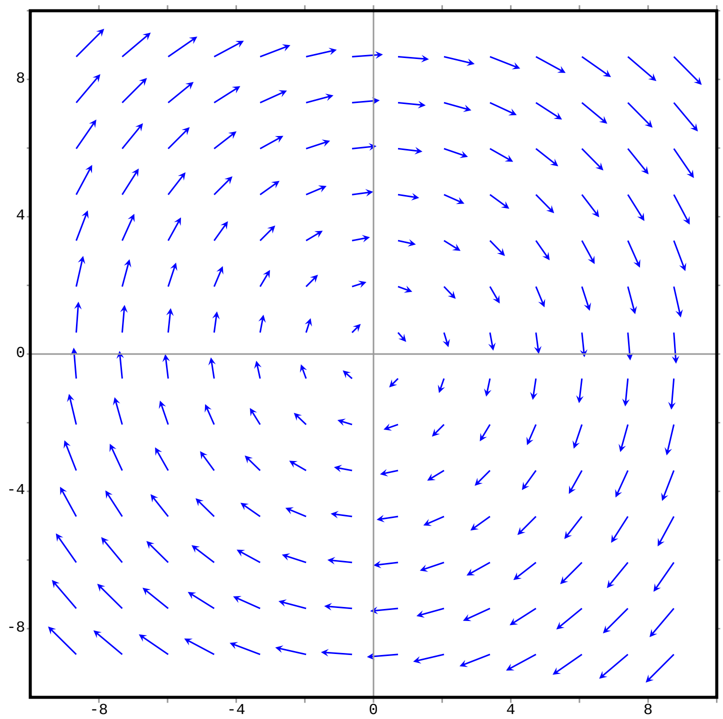
```
(%i5) f(x,a):=-a^2*x;
```

(%o5) $$f(x, a) := \left(-a^2\right) x$$

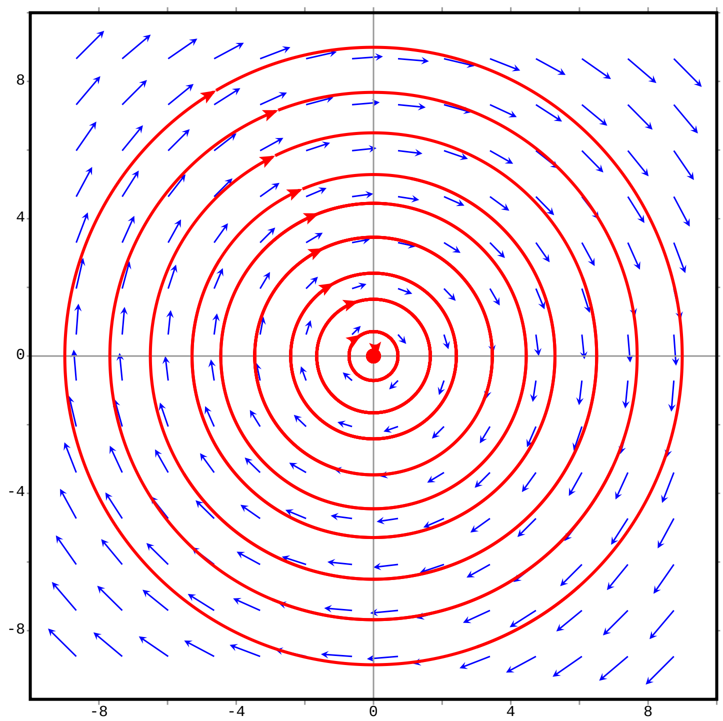
Graficamos el campo de direcciones tomando $a = 1$.

```
(%i6) plotdf([y,f(x,1)]);
```

(%o6) $$0$$



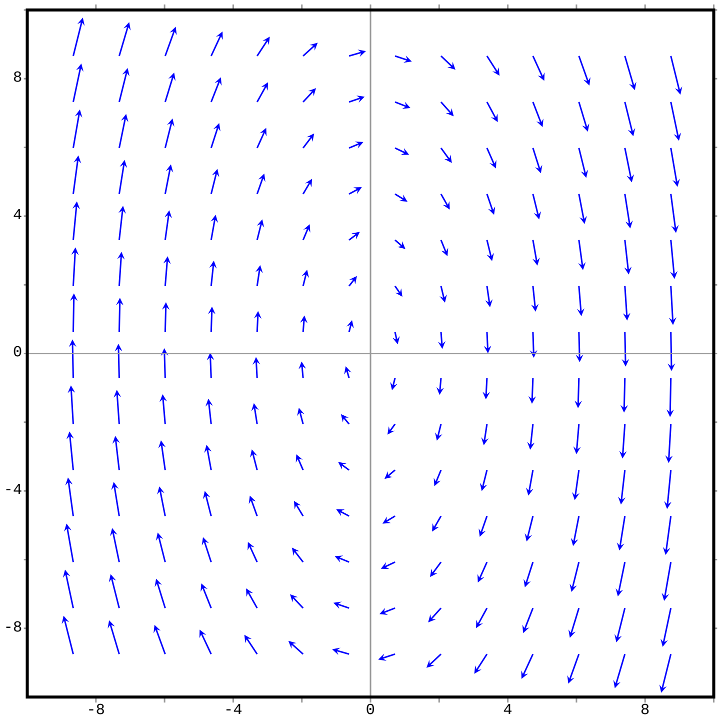
Cliqueando en distintos puntos de la pantalla obtenemos las curvas integrales.

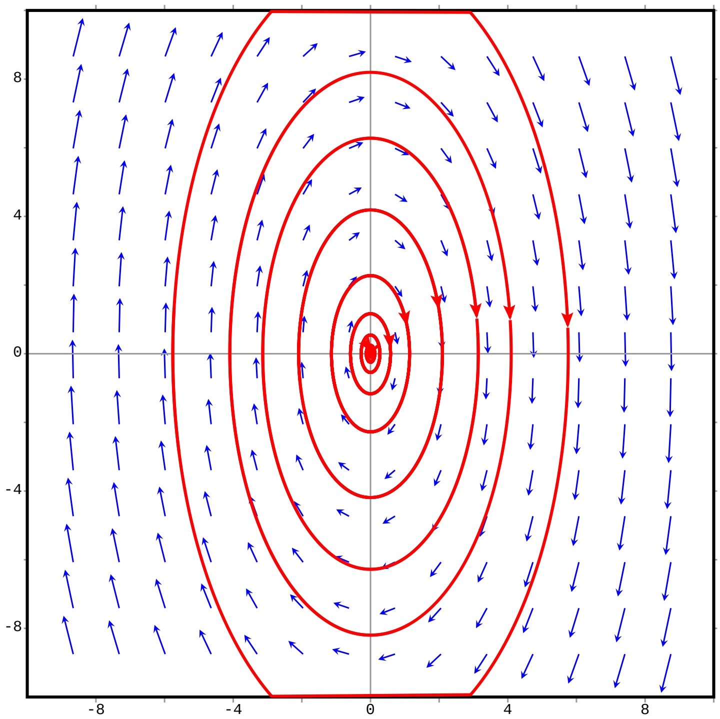


Modifiquemos el valor de *a* para observar cómo cambian los gráficos

```
(%i7) plotdf([y,f(x,2)]);
```

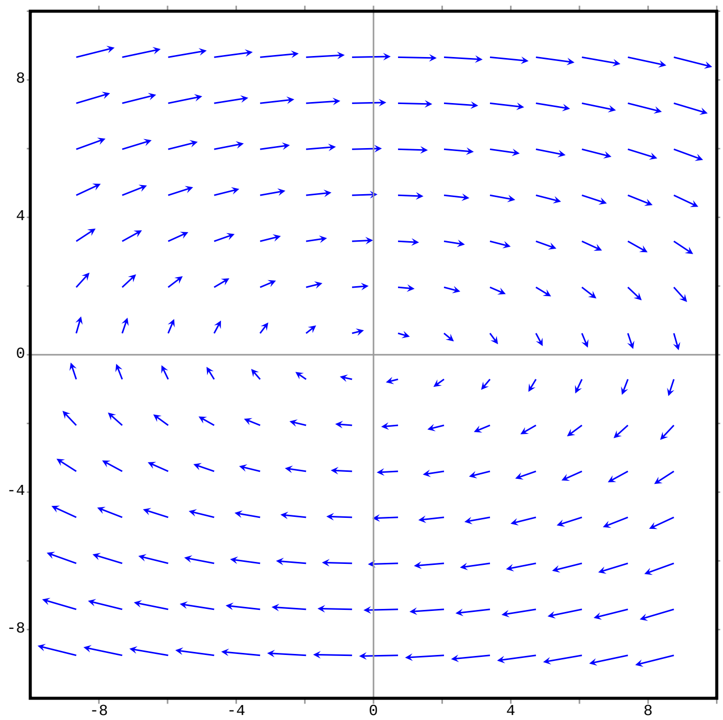
(%o7) 0

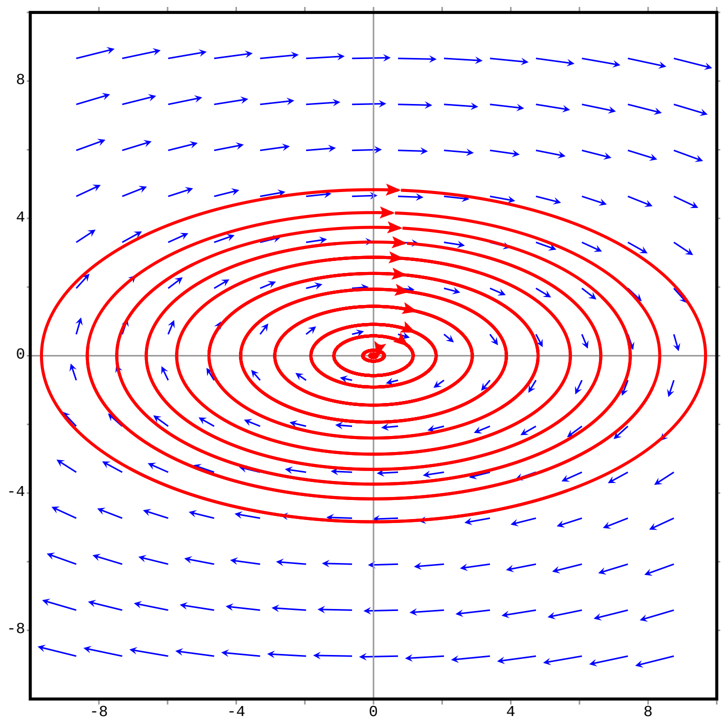




```
(%i8) plotdf([y,f(x,1/2)]);
```

(%o8) 0





De (5.10) tenemos que la solución general de (5.8) es

$$x(t) = \alpha_1 \operatorname{sen}(at) + \alpha_2 \cos(at).$$

Si consideramos el problema con los siguientes datos

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{5.11}$$

resulta que

$$x = x_0 \cos(at).$$

Diremos que x_0 es la amplitud, observar que la solución tiene período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

5.4.1 Amortiguado

El próximo paso en el desarrollo de este problema consiste en considerar el efecto de una fuerza de rozamiento. Supondremos que esta fuerza se opone al movimiento y es de magnitud proporcional a la velocidad o sea es de la forma $-c\dot{x}$ donde c es una constante positiva. Entonces, nuestra ecuación en estas nuevas condiciones es

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \tag{5.12}$$

o lo que es lo mismo

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2x = 0 \tag{5.13}$$

donde $b = \frac{c}{2m}$ y $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$. El sistema asociado a este problema es

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2by - a^2x \end{cases} \tag{5.14}$$

en este caso la matiz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{pmatrix}$$

Utilizando el wxMaxima como en el ejemplo anterior (o haciendo los cálculos a mano) podemos ver que los autovalores de A son

$$m_1, m_2 = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Entonces, como vimos en la sección anterior, tenemos que estudiar tres casos.

Caso 1: $b^2 - a^2 > 0$ o sea $b > a$.

En este caso tenemos dos autovalores reales negativos m_1 y m_2 que tienen como autovectores asociados a $v_1 = (1, m_1)$ y $v_2 = (1, m_2)$ respectivamente. Entonces la solución general de (5.14) es

$$(x, y) = c_1 e^{m_1 t} v_1 + c_2 e^{m_2 t} v_2. \tag{5.15}$$

Ahora resolveremos (5.14) utilizando wxMaxima.

wxMaxima 5.4.3. Para esto usamos el comando desolve para obtener la solución (5.14)

```
(%i9) desolve(['diff(g(t),t)=y(t),
'diff(y(t),t)=-2*b*y(t)-a^2*g(t)],[g(t),y(t)]);
```

$$Is\,(b-a)\,(b+a)\,positive, negative, orzero?n;$$

$$[g\,(t)=e^{-b\,t}\left(\frac{(2\,(2\,g\,(0)\,b+y\,(0))-2\,g\,(0)\,b)\,\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t\right)}{2\,\sqrt{a^2-b^2}}+g\,(0)\,\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t\right)\right),$$

(%o9) $$y\,(t)=e^{-b\,t}\left(\frac{\left(-2\,y\,(0)\,b-2\,g\,(0)\,a^2\right)\,\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t\right)}{2\,\sqrt{a^2-b^2}}+y\,(0)\,\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}\,t\right)\right)]$$

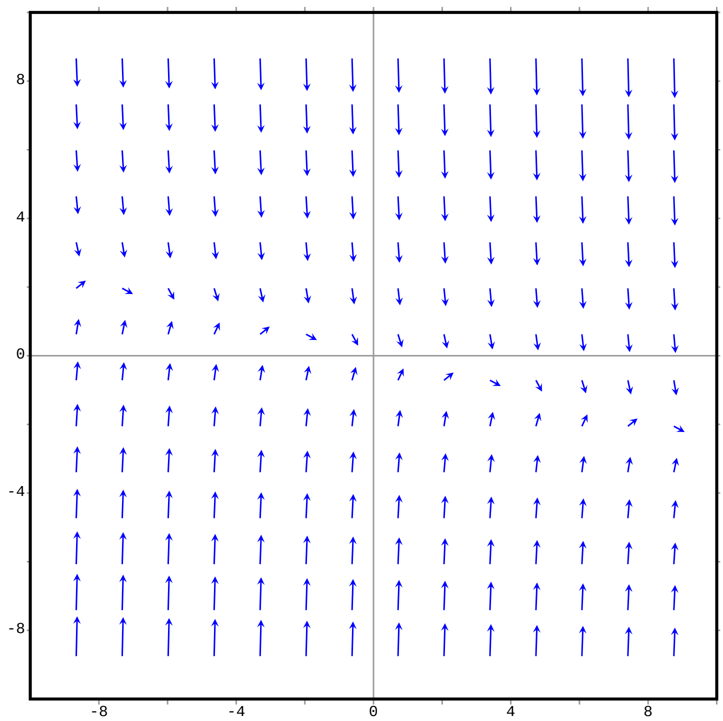
Grafiquemos el campo de direcciones

```
(%i10) H(x,y,a,b):=[y,-(a^2*x)-2*b*y];
```

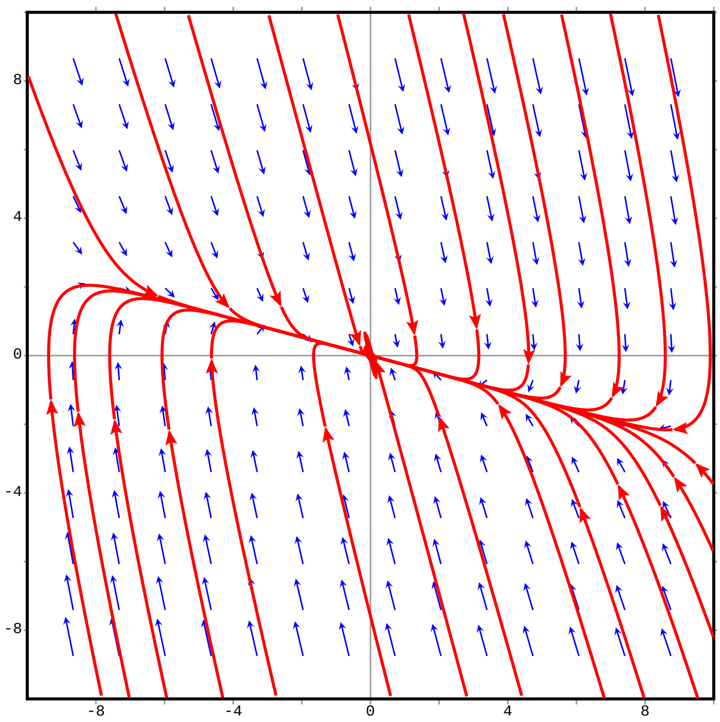
(%o10) $$H\,(x,y,a,b):=[y,-a^2\,x-2\,b\,y]$$

```
(%i11) plotdf(H(x,y,1,2));
```

(%o11) $$0$$



entonces tenemos el siguiente diagrama de fase

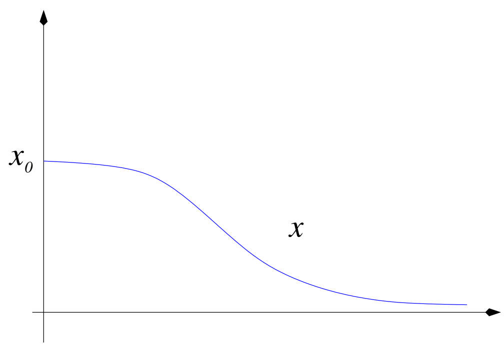


De (5.15) podemos concluir que la solución general de (5.13) es

$$x = \alpha_1 e^{m_1 t} + \alpha_2 e^{m_2 t}.$$

Usando (5.11) tenemos que la solución es

$$x(t) = \frac{x_0}{m_1 - m_2}\left(m_1 e^{m_2 t} - m_2 e^{m_2 t}\right).$$



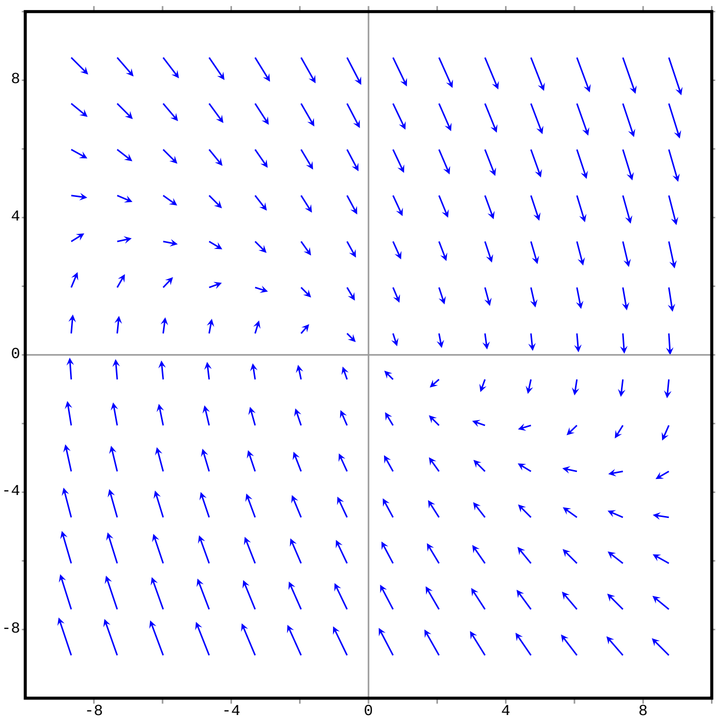
Este caso se conoce como el caso sobre amortiguado.

Caso 2: $b^2 - a^2 = 0$ o sea $b = 0$.

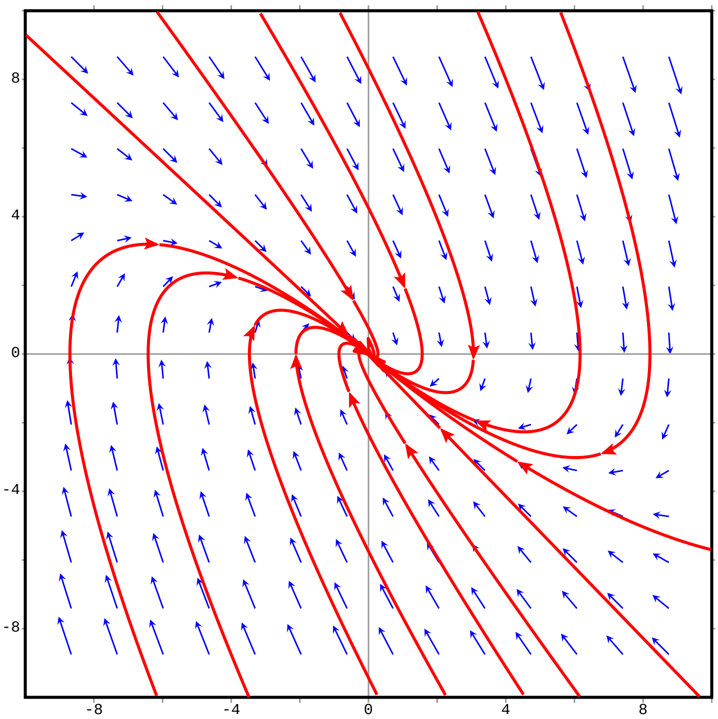
En este caso la matriz A sólo tiene un autovalor que es $m = -b = -a$ y el autovector asociado a éste es $(1, -a)$. Luego la solución general del sistema (5.14) es, por lo visto en el caso 2 de la sección anterior,

$$(x, y) = (c_1 + tc_2)(1, -a) + (0, 1))e^{-at}.$$

Realizando el gráfico del campo de direcciones en wxMaxima (tomando $a = 1$)



y el diagrama de fase es



La solución general de (5.13) en este caso es

$$x(t) = (\alpha_1 + t\alpha_2)e^{-at}.$$

Usando (5.11) llegamos a que

$$x(t) = x_0(1 + at)e^{-at}.$$

el gráfico de esta función es similar al de la función que obtuvimos en el caso anterior. Este caso se conoce como criticamente amortiguado.

Caso 3: $b^2 - a^2 < 0$ o sea $b < a$.

En este caso los autovalores de A son

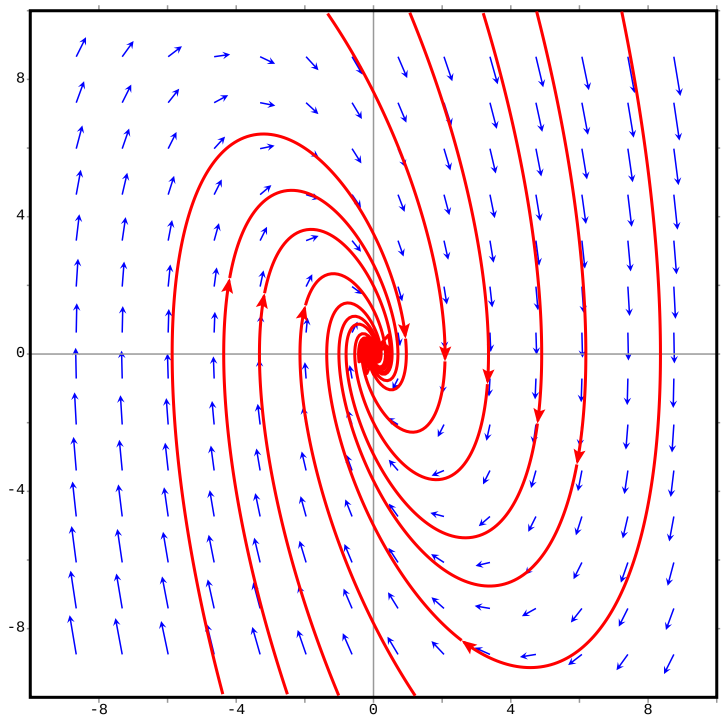
$$m_1 = -b - i\nu \quad \text{y} \quad m_2 = -b + i\nu$$

donde $\nu = \sqrt{a^2 - b^2}$. La solución general de (5.14) en este caso es

$$(x, y) = e^{-bt}\left[(c_1 \cos(\nu t) + c_2 \operatorname{sen}(\nu t))z_1 + (c_2 \cos(\nu t) - c_1 \operatorname{sen}(\nu t))z_2\right] \tag{5.16}$$

donde $z_1 + iz_2$ es autovector de A de autovalor uno.

Grafiquemos el diagrama de fase en este caso



Usando (5.16) tenemos que la solución general de (5.13) es

$$x(t) = e^{-bt}\left(\alpha_1 \cos(\nu t) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\nu t)\right).$$

y usando (5.11) tenemos que

$$x = \frac{x_0}{\nu} e^{-bt}\left(\nu \cos(\nu t) + b \operatorname{sen}(\nu t)\right).$$