9

Transformada de Laplace

9.1 Introducción

Supongamos que estamos interesados en resolver el siguiente problema

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = f(x)$$

que es lo mismo que

$$D^2 y + 4D^1 y + 5y = f(x)$$

donde D^j es el opredor de derivación $j-$ésima, entonces tenemos que

$$(D^2 + 4D^1 + 5)y = f(x)$$

nos gustaría poder hacer lo siguiente

$$y = \frac{f(x)}{D^2 + 4D^1 + 5}.$$

A continuación describiremos una herramienta que nos permitirá realizar este procedimiento.

Dada una función f definida en el intervalo $[0, +\infty)$ definimos su *transformada de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ como

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

suponiendo que la integral converge por lo menos para algún valor de s.

Ejemplo 9.1.1. Sea $f(x) = e^{kx}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}\,dx \\
&= \lim x_0 \to +\infty \int_0^{x_0} e^{-(s-k)x}\,dx \\
&= \lim_{x_0\to+\infty} \left.\frac{e^{-(s-k)x}}{-(s-k)}\right|_0^{x_0} \\
&= \lim_{x_0\to+\infty} \frac{1-e^{(s-k)x_0}}{s-k} \\
&= \frac{1}{s-k} \quad \text{si } s > k.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.1.2. Sea

$$u_c(x)\begin{cases} 0 & \text{si } x < c, \\ 1 & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_c)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}u_c(x)\,dx \\
&= \int_0^{c} e^{-sx}0\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-sx}1\,dx \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}
\end{aligned}$$

que es más regular que u_c.

9.2 Existencia

Para la existencia de la transformada es preciso que la integral converja o sea que f no puede crecer muy rápido.

Ejemplo 9.2.1. Si tomamos $f(x) = e^{x^2}$ resulta que

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2-sx}\,dx = +\infty$$

y por lo tanto no existe $\mathcal{L}(f)$

Diremos que f f es una función admisible si f es continua a trozos en cualquier intervalo finito de $[0, +\infty)$ y que no crece más rápido que la función exponencial cuando $x \to +\infty$. Vamos a suponer que existe $M > 0$ y $k > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Me^{kx} \quad \forall x \in [0, +\infty). \tag{9.1}$$

Proposición 9.2.2. *Si f es admisible entonces f tiene transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$ definida para todo $s > k$ y*

$$\mathcal{L}(f)(s) \leq \frac{M}{s-k}.$$

Demostración. Comencemos por observar que

$$\int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|\,dx \leq M\int_0^{x_0} e^{(k-s)x}\,dx \leq \frac{M}{s-k}$$

entonces

$$\lim x_0 \to +\infty \int_0^{x_0} e^{-xs}|f(x)|\,dx < \infty.$$

□

Observación 9.2.3. Sean f y g dos funciones admisibles.

1. La función $w(x) = \int_0^x f(\gamma)\,d\gamma$ es admisible y satisface (9.1) con la misma constante k que f. Luego existe la transformada de Laplace de g para $s > k$.
2. $\mathcal{L}(af + bg)(s) = a\mathcal{L}(f)(s) + b\mathcal{L}(g)(s)$.
3. Si $s > k$, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$, donde $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$
4. Si $s > k$, $\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$.

Volvamos a nuestro ejmplo. Estmos interesados en resolver

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = f(x)$$

con los siguientes datos iniciales

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \mathcal{L}(\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y) \\
&= \mathcal{L}(\ddot{y})(s) + 4\mathcal{L}(\dot{y})(s) + 5\mathcal{L}(y)(s) \\
&= s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4\left(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)\right) + 5\mathcal{L}(y)(s) \\
&= (s^2 + 4s + 5)\mathcal{L}(y)(s)
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s^2 + 4s + 5}.$$

Por lo tanto nuestra solución es la antitransformada de

$$\frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s^2 + 4s + 5}.$$

Nuestro problema ahora es definir la antitransfotada de una función o sea definir $\mathcal{L}^{-1}$.

Comencemos por mostrar la inyectividad de la transformada.

Teorem 9.2.4. *Si f y g son dos funciones admisibles tales que*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \quad \forall\ s > s_0.$$

Entonces $f(x) = g(x)$ excepto posiblemente en los puntos de discontinuidad.

Demostarción. Sea $h = f - g$ entonces $\mathcal{L}(h)(s) = 0$ para $s > s_0$. Supondremos que h es continua.

Sea $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(h)(s_0 + n) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-nx} e^{-s_0 x} h(x)\, dx \end{aligned}$$

Tomando $v(x)$ tal que $v'(x) = e^{-s_0 x} h(x)$, haciendo partes en la última integral, resulta que

$$0 = e^{nx} v(x)\Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-nx} v(x)\, dx.$$

Observmos que $e^{nx} v(x)\Big|_0^{+\infty}$ ya que

$$\begin{aligned} |v(x)| &\le \int_0^x e^{-s_0 \gamma} |h(\gamma)|\, d\gamma \\ &\le \int_0^x e^{-s_0 x} \frac{M}{s_0 - k}\, d\gamma \\ &\frac{M - Me^{-s_0 x}}{s_0(s_0 - k)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} v(x)\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando el cambio de variables $x = -\ln t$ resulta que

$$\int_0^1 t^n u(t)\, dt = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$$

donde $u(t) = v(-\ln(t))$. De lo que se deduce que

$$\int_0^1 p(t) u(t)\, dt = 0 \forall p \text{polinomio}.$$

Por lo tanto

$$u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1],$$

o sea que

$$v(x) = 0 \quad \forall x \ge 0,$$

de lo que concluimos que

$$h(x) = 0 \quad \forall x \ge 0.$$

Que era lo que queríamos probar. □