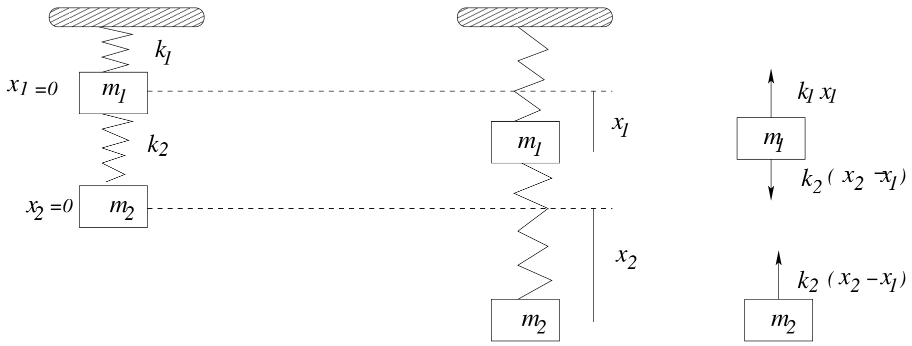
8

Sistema Lineales

Consideremos el siguiente problema: supongamos que tenemos dos resortes con constantes de elasticidad k_1 y k_2 y dos cuerpos con masa m_1 y m_2



Tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Para simplificar consideremos el caso en que $m_1 = 2$, $m_1 = 1$, $k_1 = 4$ y $k_2 = 2$, entonces nuestras ecuaciones quedan de la siguiente forma

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - 2x_1 = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

y consideramos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = 3, \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Observemos que (8.1) se transforma en un sistema lineal de primer orden de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\dot{X} = AX, \tag{8.3}$$

donde $X = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A son $\pm i$ y $\pm 2i$ y los autovectores asociados a $\pm i$ y $\pm 2i$ son $(1, \pm i, 2, \pm 2i)$ y $(1, \pm 2i, -1, \mp 2i)$ respectivamente. Tomando

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

resulta que

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Entonces, la solución de (8.3) es

$$X(t) = Pe^{Jt}P^{-1}X_0.$$

Como estamos resolviendo (8.1) sujeto a (8.2), tomamos $X_0 = (3, 0, 3, 0)$ y obtenemos

$$X(t) = (\cos(2t) + 2\cos(t), -2\operatorname{sen}(2t) - 2\sin(t), 4\cos(t) - \cos(2t), 2\operatorname{sen}(2t) - 4\operatorname{sen}(t))$$

o sea que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(2t) + 2\cos(t) \\ x_2(t) &= 4\cos(t) - \cos(2t) \end{aligned}$$

Observemos que para (8.3), tenemos que $E^s = E^u =$ y $E^c = \mathbb{R}^4$.

8.1 Descomposición de Schur

A continuación daremos una alternativa a la forma de Jordan.

Lema 8.1.1 (Lema de Schur)**.** *Para cualquier matriz cuadrada A, existe una matriz unitaria Q ($\overline{Q^t} = Q^{-1}$) tal que $Q^{-1}AQ = T$ es una matriz triangular superior.*

Idea de la Demostración. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supongamos lo cierto para $n-1$ y probémoslo para n.

A tiene por lo menos un autovector asociado al autovalor λ_1. Sea v_2 el autovector normalizado de A asociado a λ_1. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y consideremos $Q_1 = [v_1|v_2|\ldots|v_n]$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_i. Resulta que Q_1 es unitaria y

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

donde $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Usando la hipótesis inductiva sabemos que existe $Q_2 \in \mathbb{R}^{n-1}n-1$ unitaria tal que $Q_2^{-1}A_2Q_2 = T_2$ es una matriz triangular superior. Tomando

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

resulta que

$$R^{-1}Q_1^{-1}AQ_1R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = T$$

es triangular superior y $Q = Q_1R$ es unitaria. □

Ejemplo 8.1.2. Consideremos el siguiente problema

$$\dot{X} = AX$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que 1 es una autovalor de A y que $(1,1)$ es un autovector asociado al autovalor uno. Si tomamos

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

resulta que Q es unitaria y

$$Q^{-1}AQ = T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la solución de nuestro problema es

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 \\ &= Qe^{tT}Q^{-1}X_0 \\ &= Q\begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}Q^{-1}X_0 \end{aligned}$$

8.2 Linealización

Consideremos el siguiente problema no lineal

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{3}(y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 = y_1(2 - y_2). \end{cases} \tag{8.4}$$

Comencemos por calcular los puntos de equilibrio de este problema. Sea $F(y_1, y_2) = (\frac{1}{3}(y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_2), = y_1(2 - y_2))$, buscamos los puntos (y_1, y_2) tales que $F(y_1, y_2) = 0$. Es fácil ver que estos puntos son $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$ y $(-1, 2)$.

A continuación clasificaremos estos puntos en fuente, sumidero o silla. Para esto necesitamos la matriz diferencial de F.

$$DF(y - 1, y_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1 - 2y_1) & \frac{1}{3}(2y_2 - 1) \\ 2 - y_2 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

- $$DF(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

  que tiene como autovalores a $\frac{1 \pm \sqrt{23}i}{6}$. Por lo tanto el $(0, 0)$ es fuente.

- $$DF(2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

  que tiene como autovalores a -1 y -2. Por lo tanto el $(2, 2)$ es sumidero.

- $$DF(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  que tiene como autovalores a $\frac{1 \pm \sqrt{13}i}{6}$. Por lo tanto el $(0, 1)$ es silla.

- $$DF(-1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  que tiene un único autovalor que es 1. Por lo tanto el $(-1, 2)$ es fuente.

Index