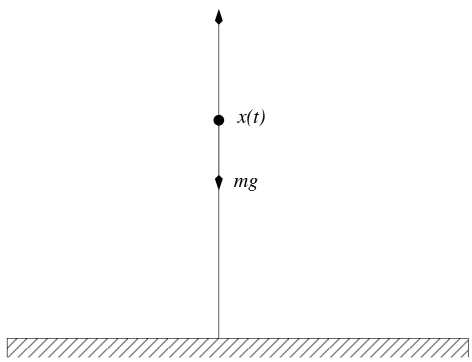
4

Caída de un Cuerpo

4.1 Caída Libre de un Cuerpo

A continuación consideramos el problema de movimiento vertical de un cuerpo bajo la acción de la gravedad.

Consideremos un cuerpo de masa m. Despreciaremos la resistencia del aire, supondremos que el movimiento se rige por la segunda Ley de Newton y que la única fuerza actuante es la de la gravedad. Para la posición del cuerpo se hará referencia a un eje x con origen en el suelo y orientado hacia arriba en el instante T diremos que la posición del cuerpo sera $x(t)$.



Por la segunda Ley de Newton tenemos que

$$m\ddot{x} = -mg.$$

Integrando obtenemos que

$$\dot{x}(t) = -gt + c.$$

Luego si la velocidad inicial es v_0, resulta que

$$\dot{x}(t) = -gt + v_0.$$

Integrando una vez más resulta que

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c.$$

Si la altura inicial es h resulta que

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h.$$

Observemos que, si notamos con $v = \dot{x}$, tenemos que

$$v^2 = g^2t^2 - 2gv_0t + v_0^2$$

o sea que

$$\begin{aligned} v_0^2 - v^2 &= -g^2t^2 + 2gtv_0 \\ &= 2g(x(t) - h). \end{aligned}$$

Por lo tanto un cuerpo que cae de una altura h ($v_0 = 0$) alcanza el suelo con velocidad

$$\sqrt{2gh}.$$

Esto último se conoce como la *Ley de Torricelli*.

4.2 Caída de un Cuerpo Considerando la Resistencia del Aire

Consideremos el modelo anterior modificado por la introducción de la hipótesis de que hay otra fuerza actuando sobre el cuerpo. Supondremos que esa fuerza, siempre opuesta al movimiento, es una función de la velocidad $\dot{x}$. Analizaremos los siguientes 3 casos:

1. El caso en que la fuerza de resistencia depende linealmente de la velocidad.
2. El caso en que la dependencia es cuadrática.
3. Por último consideraremos una pequeña fricción.

1.- Por la segunda Ley de Newton tenemos que

$$m\ddot{x}_k = -mg - k\dot{x}_k, \tag{4.1}$$

donde k es una constante positiva. Para resolver esta ecuación planteamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, & x_k(0) = h, \\ \dot{y}_k = -g - \frac{k}{m}y_k, & y_k(0) = v_0. \end{cases}$$

Resolvemos primero la segunda ecuación

$$\dot{y}_k = -g - \frac{k}{m} y_k,$$

entonces

$$\frac{\dot{y}_k}{g + \frac{k}{m} y_k} = -1$$

e integrando

$$\frac{m}{k} \ln\left(\left| g + \frac{k}{m} y_k \right| \right) - \frac{m}{k} \ln\left(\left| g + \frac{k}{m} v_0 \right| \right) = -t.$$

Por lo tanto

$$g + \frac{k}{m} y_k = \left(g + \frac{k}{m} v_0 \right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

o sea que

$$y_k = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

Luego

$$\lim_{k \to 0} y_k = v_0 - gt = y_0,$$

y se observa la continuidad de los parámetros en el caso $k = 0$.

Por otro lado

$$\lim_{t \to +\infty} y_k = -\frac{mg}{k},$$

a este límite lo notaremos com v_∞ y se conoce como la velocidad límite.

Por último, como $\dot{x}_k = y_k$ resulta que

$$x_k = \int_0^t y_k(s)\, ds = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k} \left[t + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1 \right) \right],$$

es una solución de (4.1).

2.- Ahora consideramos el siguiente caso

$$m\ddot{x}_k = -mg + k\dot{x}_k^2, \quad x_k(0) = h \text{ y } \dot{x}_k(0) = 0 \tag{4.2}$$

con k una constante positiva. El sistema asociado a este problema es

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, & x_k(0) = h \\ \dot{y}_k = -g + \frac{k}{m} y_k^2 & y_k(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvamos primero la ecuación

$$\dot{y}_k = -g + \frac{k}{m} y_k^2.$$

Observemos que

$$\dot{y}_k = -g + \frac{k}{m}y_k^2 = \frac{k}{m}\left(y_k + \sqrt{\frac{gm}{k}}\right)\left(y_k - \sqrt{\frac{gm}{k}}\right).$$

Se observa que en este caso $v_\infty = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. entonces

$$\begin{aligned}\frac{k}{m} &= \frac{\dot{y}_k}{\left(y_k + \sqrt{\frac{gm}{k}}\right)\left(y_k - \sqrt{\frac{gm}{k}}\right)}\\ &= \frac{1}{2v_\infty}\left(\frac{\dot{y}_k}{y_k - v_\infty} - \frac{\dot{y}_k}{y_k + v_\infty}\right),\end{aligned}$$

e integrando entre 0 y t

$$\begin{aligned}2v_\infty \frac{k}{m}t &= \ln\left(\left|\frac{y_k - v_\infty}{y_k + v_\infty}\right|\right)\\ &= \ln\left(\frac{v_\infty - y_k}{y_k + v_\infty}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2v_\infty}{y_k + v_\infty} - 1\right),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{2v_\infty}{y_k + v_\infty} - 1 = e^{2v_\infty \frac{k}{m}t}$$

o sea que, teniendo en cuenta que $2v_\infty \frac{k}{m} = \sqrt{\frac{gk}{m}}$, tenemos que

$$y_k = -\sqrt{\frac{gm}{k}}\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1}.$$

Observemos que

$$\lim_{k\to 0} y_k = -gt = y_0$$

y

$$\lim_{t\to +\infty} y_k = -v_\infty.$$

Para terminar con este ejemplo necesitamos hallar x_k sabiendo que $\dot{x}_k = y_k$ o sea necesito una primitiva de y_k. Lo que queda como ejercicio para el lector.

3.- Por último consideraremos el caso

$$m\ddot{x}_\varepsilon = -gm - \varepsilon\frac{m\dot{x}_\varepsilon}{1 - \dot{x}_\varepsilon}, \quad x(0)_\varepsilon = h \text{ y } \dot{x}_\varepsilon(0) = 0. \tag{4.3}$$

donde $0 < \varepsilon << 1$. En este caso el sistema asociado a la ecuación es

$$\begin{cases}\dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = h,\\ \dot{y}_\varepsilon = -g - \varepsilon\frac{y_\varepsilon}{1-y_\varepsilon}, & y_\varepsilon(0) = 0.\end{cases}$$

En este caso no vamos a hallar la solución exacta del problema sino a dar una aproximación de la misma usando la diferenciación de la solución con respecto a los parámetros. Es decir

$$y_\varepsilon \approx w_0 + w_1\varepsilon$$

donde $w_0 = y_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}$ y $w_1 = \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$.

Comencemos por hallar w_0. Observemos que

$$y_\varepsilon(t) = -gt - \varepsilon \int_0^t \frac{y_\varepsilon(s)}{1 - y_\varepsilon(s)}\, ds,$$

entonces

$$w_0 = y_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = -gt.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \int_0^t \frac{y_\varepsilon(s)}{1 - y_\varepsilon(s)}\, ds + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{y_\varepsilon(s)}{1 - y_\varepsilon(s)}\right) ds,$$

entonces

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^t \frac{w_0(s)}{1 - w_0(s)}\, ds \\ &= \int_0^t \frac{gs}{1 + gs}\, ds \\ &= t - \frac{\ln(1 + gt)}{g}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_\varepsilon \approx -gt - \varepsilon\left(t - \frac{\ln(1 + gt)}{g}\right) \tag{4.4}$$

y como $\dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon$, tenemos que

$$x_\varepsilon \approx \frac{\varepsilon - g}{2} t^2 - \frac{\varepsilon}{g^2}(gt + 1)(\ln(gt + 1) - 1).$$

Para terminar, resolvamos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{y}_\varepsilon = -g - \varepsilon \frac{y_\varepsilon}{1 - y_\varepsilon}, \\ y_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

utilizando wxMaxima.

Comencemos por ingresar la ecuación,

```
(%i1) 'diff(y,t)=-98/10-a*(y/(1-y));
```

(%o1) $$\frac{d}{d\,t}\,y=-\frac{a\,y}{1-y}-\frac{49}{5}$$

donde $a=\varepsilon$ y $g=98/10$.

Ahora resolvamosla usando el comando ode2,

```
(%i2) ode2(%,y,t);
```

(%o2) $$-\frac{25\,a\,log\,((5\,a-49)\;y+49)+(245-25\,a)\;y}{25\,a^2-490\,a+2401}=t+\%c$$

Ahora reemplazemos el dato $y_\varepsilon(0)=0$, para esto utilizaremos el comando ic1,

```
(%i3) ic1(%,t=0,y=0);
```

(%o3)
$$-\frac{25\,a\,log\,((5\,a-49)\;y+49)+(245-25\,a)\;y}{25\,a^2-490\,a+2401}=\frac{\left(25\,a^2-490\,a+2401\right)\,t-25\,log\,(49)\;a}{25\,a^2-490\,a+2401}$$

Lo próximo que vamos a hacer es comparar la solución hallada usando la aproximación (4.4) y la solución real hallada usando Wxmaxima. Para esto definimos en el wxMaxima la siguientes funciones

```
(%i4) F(t,y,a):=(5*a-49)^2*t-25*log(49)*a+25*a*log(49+(5*a-49)*y)
                +5*(49-5*a)*y;
```

(%o4)
$$F\,(t,y,a):=(5\,a-49)^2\,t-25\,log\,(49)\;a+25\,a\,log\,(49+(5\,a-49)\;y)+5\;(49-5\,a)\;y$$

y

```
(%i5) G(t,y,a):=y+98/10*t-a*(t-log(1+98/10*t)/(98/10));
```

(%o5) $$G\,(t,y,a):=y+\frac{98}{10}\,t+(-a)\left(t-\frac{log\left(1+\frac{98}{10}\,t\right)}{\frac{98}{10}}\right)$$

Observar que la solución hallada con wxMaxima se puede reescribir de la siguiente forma
$$F(t,y,a)=0 \tag{4.5}$$
y la solución hallada en (4.4) se reescribe de la siguiente manera
$$G(t,y,a)=0, \tag{4.6}$$
en los dos casos a está fijo.

Ahora grafico la curva de nivel, para eso utilizaremos el paquete draw que nos permite graficar curvas de nivel de una función

```
(%i6) load(draw);
```

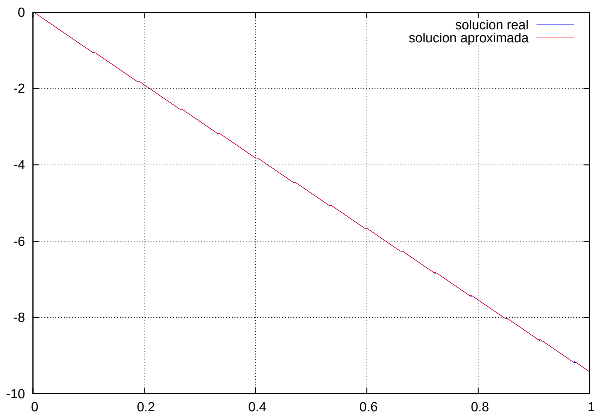
(%o6) $/usr/share/maxima/5.17.1/share/draw/draw.lisp$

Graficaremos tomando $a = \varepsilon = {}^{1}/{2}$.

```
(%i7) draw2d(grid=true,line_type=solid,color=blue,key="solucion real",
implicit(F(t,y,1/2)=0,t, 0,1,y, -10,0),line_type=solid,color=red,
key="solucion aproximada",implicit(G(t,y,1/2)=0,t, 0,1,y, -10,0));
```

$$`rat' replaced 3.891820298110627 by 35256/9059 = 3.891820289215145$$

(%o7) $[gr2d\,(implicit, implicit)]$



Observamos que casi no se notan diferencias entre las curvas.