La función de Green del semi-espacio

Notamos $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\, x_n > 0\}$ el semi-espacio, $x = (\tilde{x}, x_n)$ un punto genérico de $\mathbb{R}^n_+$, y $\bar{x} = (\tilde{x}, -x_n)$ el simetrico de x con respecto al hyperplano $\{x_n = 0\}$. Definimos $H_x(y) = \Phi(\bar{x} - y)$.

1) Verificar que H_x es armónica en $\mathbb{R}^n_+$ con $H_x(y) = \Phi(x - y)$ en $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Definimos entonces

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(\bar{x} - y)$$

la función de Green del Laplaciano en $\mathbb{R}^n_+$.

2) Probar que el nucleo de Poisson es

$$K(x, y) = \frac{\partial_y G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{2x_n}{|S_0(1)||x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Sea $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+)$. Esperamos que la función

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y) g(y)\, dy$$

sea una función armónica en $\mathbb{R}^n_+$ que coincide con g en $\partial\mathbb{R}^n_+$. Para probarlo admitimos primero que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y)\, dy = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$. Luego

3) Probar que para todo $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ y todo $\delta > 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_{x_0}(\delta)} K(x, y)\, dy = 0.$$

4) Probar que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es bien armónica en $\mathbb{R}^n_+$ y que para todo $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$,

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0).$$