ESPACIOS DE SOBOLEV

NICOLAS SAINTIER

1. Definicion

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Recordemos que cualquier función $u \in L^1_{loc}(U)$ define una distribución por la fórmula $(u, \phi) = \int_U u\phi$, $\phi \in C_c^\infty(U)$, y por lo tanto puede ser derivada infinitamente definiendo $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(U)$ por $(D^\alpha u, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha \phi)$, $\phi \in C_c^\infty(U)$. Definimos entonces el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ como el subespacio de $L^p(U)$ de las funciones cuyas derivadas de orden $\leq k$ (en sentido de las distribuciones) pertenecen a L^p:

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) \, \mathrm{tq} \, D^\alpha u \in L^p(U) \, \forall \, |\alpha| \leq k\}$$

es decir que $u \in L^p(U)$ pertenece a $W^{k,p}(U)$ si existen funciones $u_\alpha \in L^p(U)$, $|\alpha| \leq k$, tales que

$$\int_U u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Se tiene en este caso que $D^\alpha u := u_\alpha$.

Por ejemplo $C^k(\bar{U}) \subset W^{k,p}(U)$ pero también funciones no acotadas como $|x|^{-\alpha}$ pertenecen a $W^{1,p}(B_0(1))$ si $\alpha < (n-p)/p$. Se verifica que $W^{k,p}(U)$ es un espacio vectorial. Definimos una norma en $W^{k,p}(U)$ por

$$\|u\|^p_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \quad \text{si } p < \infty,$$
$$\|u\|_{W^{k,\infty}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty \quad \text{si } p = \infty.$$

Usando que L^p es un Banach, se ve que $W^{k,p}(U)$ es un Banach y que $W^{k,2}(U)$ es un Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

2. caso $n = 1$

Supongamos que $U = (a, b)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$. En este caso la siguiente proposición afirma que una función $u \in W^{k,p}(U)$ puede considerarse continua en $\bar{U}$ (si la modificamos eventualmente en un conjunto de medida cero), y que vale el teórema fundamental de cálculo:

Proposicion 2.1. *Dado $u \in W^{k,p}(U)$ existe $\tilde{u} \in C(\bar{U})$ tal que $u = \tilde{u}$ ctp y*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) \, dt \quad \forall \, x, y \in \bar{U}.$$

En particular

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \le \int_y^x |u'(t)|\, dt \le \|u'\|_p |x-y|^{1-1/p}. \tag{1}$$

Siempre se identifica u con $\tilde{u}$.

Además se puede probar que la inyección de $W^{k,p}(U)$ en $C(\bar{U})$ es continua en el sentido que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_\infty \le C\|u\|_{W^{k,p}}$. Ademas (1) permite aplicar el teórema de Arzela-Ascoli si U es acotado y $p > 1$. Por lo tanto en este caso la inyección de $W^{k,p}(U)$ en $C(\bar{U})$ es compacta.

3. Aproximación por funciones suaves

Fijemos un entero k y un $p \in [1, +\infty)$. Queremos aproximar $u \in W^{k,p}(U)$ por funciones C^∞. Lo primero que podemos hacer es regularizar u por convolución considerando $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ (donde $\rho(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ con $\rho \in C_c^\infty(B_0(1))$ radial positiva de integral uno). Notar que u_ε esta definida unicamente en $U_\varepsilon := \{x \in U\, tq\, d(x, \partial U) > \varepsilon\}$ por definición del producto de convoluión, y que $u_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. Resulta que $D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha u * \rho_\varepsilon$ y por lo tanto, como $D^\alpha u \in L^p(U)$ si $|\alpha| \le k$, tenemos que $D^\alpha u_\varepsilon \to D^\alpha u$ en $L^p_{loc}(U)$ es decir $u_\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(U)$.

Si queremos aproximar u por funciones suaves hasta ∂U debemos tratar con mas cuidado lo que pasa cerca de ∂U. Suponiendo U acotado la idea es de acercarse a ∂U considerando $V_i := \{x \in U\, tq\, 1/(i+1) < d(x, \partial U) < 1/i\}$, regularizar u en V_i por convolución como antes, y despues pegar estas regularizadas usando una partición de la unidad. De esta manera fabricamos $u_\varepsilon \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ tal que $u_\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}$.

Finalmente podemos aproximar u por $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{U})$ suponiendo ∂U de clase C^1 (para escribir localmente ∂U como el gráfico de una función C^1): suponiendo que estamos en un cacho (es decir carta) de ∂U consideramos $v_\varepsilon(x) = u(x_\varepsilon)$ donde x_ε se obtiene a partir de x moviendose un poco hacia U siguiendo la dirección normal. De esta manera hay bastante lugar alrededor de x_ε para regularizar por convolución.

Finalmente se puede probar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Para eso fabricamos funciones cut-off η_k con soporte en $B_0(2k)$ como $\eta_k(x) = \eta(|x|/k)$ donde $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ es C^∞ con soporte en $B_0(2)$ y vale 1 en $B_0(1)$. Entonces, dada $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, la funcion u cortada suavemente usando η_k, es decir $\eta_k u$, converge a u en $W^{k,p}$. Basta regularizar $\eta_k u$ por convolución para obtener funciones C^∞ con soporte compacto que convergen a u en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. Teorema de inyección de Sobolev y de Rellich-Kondrakov

El teórema de Sobolev afirma que si $1 \le p < n$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{p^*} \le C\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

donde $p^* := np/(n-p)$. Notar que $p^* > p$. Usando la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ obtenemos que

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

De hecho si $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ converge a $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces converge tambien en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, usando (2) vemos que (u_k) es de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto converge a un $v \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. La convergencia vale en particular en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Luego $u = v$. Basta entonces escribir (2) por u_k y pasar al límite.

Ahora si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado C^1, admitiendo que cualquier función $u \in W^{1,p}(U)$ puede ser extendida en un función $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de manera que $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ con un C independiente de u, obtenemos que

$$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U).$$

Luego, como U es de medida finita, obtenemos que

$$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U) \quad \forall\, q \in [1, p^*].$$

En particular

$$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U).$$

El teorema de Rellich-Kondrakov afirma que si $q < p^*$ entonces la inyeccion de $W^{1,p}(U)$ en $L^q(U)$ es, además de continua, compacta. Eso significa que de cualquier sucesión $(u_k) \subset W^{1,p}(U)$ acotada se puede extraer una subsucesión que converge en $L^q(U)$ a un u. Obtenemos entonces que $u_k \to u$ en $L^q(U)$ para todo $q \in [1, p^*)$ (a una subsucesión). admitiendo que $W^{1,p}(U)$ es reflexivo (viene de que los L^q son reflexivos si $1 < q < \infty$) se puede también suponer (a extracción de una subsucesión) que los u_k convergen debilmente en $W^{1,p}(U)$ a un v. Como $u_k \to u$ en $L^p(U)$, en particular debilmente en $L^p(U)$, y que $L^p(U)' \subset W^{1,p}(U)'$, obtenemos que $u = v$. Resumiendo,

Proposicion 4.1. *De cualquier sucesión $(u_k) \subset W^{1,p}(U)$ acotada, se puede extraer una subsucesión que converge a un $u \in W^{1,p}(U)$ debilmente en $W^{1,p}(U)$ y fuertemente en $L^q(U)$ para todo $q \in [1, p^*)$ (en particular en $L^p(U)$).*

La prueba del teórema de inyección compacta de Rellich-Kondrakov se basa en una versión del teorema de Arzela-Ascoli adaptada a los espacios L^p en la que la hipotesis de uniforme equicontinuidad esta reemplazada por: para todo $V \subset\subset U$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \operatorname{dist}(V, \partial U))$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\|\tau_h u_k - u_k\|_{L^p(V)} < \varepsilon$ para todo k (donde $\tau_h u(x) := u(x-h)$). El control de $\|\nabla u_k\|_p$ permite verificar esta hipotesis.

Este teorema es muy útil para mostrar desigualdades por el absurdo como por ejemplo la de Poincaré más adelante, o para probar la existencia de soluciones a ecuaciones por el método variacional (en el que se busca una solución como mínimo de cierta funcional relacionada con la ecuación - la compacidad dada por el teo de Rellich-Kondrakov es la herramienta fundamental para probar que una sucesión minimizante tiene un punto de acumulación que se espera ser un punto de mínimo de la funcional y por lo tanto una solución de la ecuación.).

5. Traza de una función de $W^{1,p}(U)$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotada C^1. Como ∂U tiene medida cero, no tiene sentido hablar del valor puntual de $u \in W^{k,p}(U)$ en ∂U. Por otro lado los espacios de Sobolev son el marco adaptado para resolver ecuaciones en derivadas parciales en U y estas vienen con condición de borde.

Se puede probar que existe una aplicación lineal continua

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

que extiende la aplicación $u \in C^1(\bar{U}) \to u_{|\partial U} \in C(\partial U)$. Llamamos a Tu la traza de u en ∂U.

La continuidad de T tiene por consecuencia que la fórmula de integración por partes usual

$$\int_U u\partial_i v = -\int_U \partial_i uv + \int_{\partial U} uv\nu_i$$

vale si $u \in W^{1,p}(U)$ y $v \in W^{1,p'}(U)$ (con $1/p + 1/p' = 1$). Basta escribirla para funciones $u_k, v_k \in C^\infty(\bar{U})$ que aproximan a u y v y luego pasar al límite. En particular vale en el caso frecuente $u, v \in W^{1,2}(U)$.

El nucleo de T se nota $W_0^{1,p}(U)$ es decir

$$W_0^{1,p}(U) := \{u \in W^{1,p}(U)\,\mathrm{tq}\, u = 0\, en\, \partial U\}.$$

Como T es continua, $W_0^{1,p}(U)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(U)$. Se puede probar que $W_0^{1,p}(U)$ es exactamente el espacio de las funciones de $W^{1,p}(U)$ que pueden ser aproximadas por funciones $C_c^\infty(U)$ es decir que

$$W_0^{1,p}(U) \text{ es la clausura de } C_c^\infty(U) \text{ para la norma } \|.\|_{W^{1,p}}.$$

Una desigualdad muy importante relacionada con $W_0^{1,p}(U)$ es la de Poincaré que afirma que $u \in W_0^{1,p}(U) \to \|\nabla u\|_p$ es una norma equivalente a la usual en $W_0^{1,p}(U)$ es decir

Teorema 5.1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p$$

para cualquier $u \in W_0^{1,p}(U)$.

Considerando funciones constantes se ve que tal desigualdad no puede valer en $W^{1,p}(U)$.

Una prueba posible de esta consiste en un razonamiento por el absurdo basado en el teorema de Rellich-Kondrakov. Suponemos que existe $\tilde{u}_k \in W_0^{1,p}(U)$ tal que $\|\tilde{u}_k\|_p \geq k\|\nabla\tilde{u}_k\|_p$. Considerando $u_k = \tilde{u}_k/\|\tilde{u}_k\|_p$, obtenemos una sucesión $u_k \in W_0^{1,p}(U)$ tal que $\|u_k\|_p = 1$ y $\|\nabla u_k\|_p \to 0$. Usando el teorema de R-K podemos suponer (a extracción de una subsucesión) que los u_k convergen a un $u \in W^{1,p}(U)$ debilmente en $W^{1,p}(U)$ y fuerte en $L^p(U)$. Luego $\|u\|_p = \lim\|u_k\|_p = 1$ y $\|\nabla u\|_p \leq \liminf\|\nabla u_k\|_p = 0$. Podemos suponer U conexo. Entonces u es una función constante no nula. Como $\|\nabla u_k\|_p \to 0 = \|\nabla u\|_p$ obtenemos que $\nabla u_k \to \nabla u$ en L^p. Luego $u_k \to u$ en $W^{1,p}$, y entonces $Tu = 0$ pues u_k tiene traza cero. Luego u es constante no nula con traza cero - absurdo.

Si consideramos el espacio $W^{2,p}(U)$, con ∂U de clase C^2, entonces podemos hablar de la traza de $u \in W^{2,p}(U) \subset W^{1,p}(U)$ y también de las de $\partial_i u \in W^{1,p}(U)$. En particular podemos definir la derivada normal $\partial_\nu u \in L^p(\partial U)$. Ocurre que la aplicación

$$u \in W^{2,p}(U) \to (u, \partial_\nu u) \in L^p(\partial U) \times L^p(\partial U)$$

es continua y extiende la aplicación $u \in C^2(\bar{U}) \to (u, \partial_\nu u) \in C(\partial U) \times C(\partial U)$. Su nucleo se nota $W_0^{2,p}(U)$ es decir

$$W_0^{2,p}(U) := \{u \in W^{2,p}(U) \, \mathrm{tq} \, u = \partial_\nu u = 0 \, en \, \partial U\}.$$

Como antes se puede probar que $W_0^{2,p}(U)$ es la clausura de de $C_c^\infty(U)$ para la norma $\|.\|_{W^{2,p}}$. También se puede probar que la fórmula de Green

$$\int_U u\Delta v = \int_U \nabla u \nabla v - \int_{\partial U} u \partial_\nu v$$

vale si $v \in W^{2,p}(U)$ y $u \in W^{1,p'}(U)$ aproximando u y v por funciones $C^\infty(\bar{U})$.

References

[1] Adams, Sobolev spaces.
[2] Evans, Partial differential equations.
[3] Gilbarg, N.Trudinger,