

## Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2010

### Práctica 8: Espectro de un operador - Cálculo funcional

1. Sea  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  dado por  $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $1 < p < \infty$  y  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ .
  - a) Si  $\alpha_n \rightarrow 0$ , hallar  $\sigma(T)$ .
  - b) Hallar  $\sigma(T)$  en el caso general ( $\alpha_n \in \ell^\infty$ ).
2. Sean  $U \in \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $\varphi \in C(\overline{U})$  y  $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$  el operador de multiplicación.
  - a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que  $M_\varphi$  sea inversible.
  - b) Calcular  $\sigma(M_\varphi)$
  - c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que  $M_\varphi$  sea compacto.
3. Si  $1 < p < \infty$ , sean  $S$  y  $T$  en  $\mathcal{L}(\ell^p)$  los shifts a derecha e izquierda respectivamente.
  - a) Probar que  $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| \leq 1\}$  y que si  $|\lambda| < 1$  entonces  $\lambda$  es un autovalor.
  - b) Calcular  $\sigma(S)$
  - c) Probar que  $S$  no tiene autovalores.
4. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E)$ .
  - a) Si  $\lambda \in \sigma(T)$  entonces  $\lambda^n \in \sigma(T^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
  - b) Si  $T$  es inversible y  $\lambda \in \sigma(T)$  entonces  $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$
5. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $A \in \mathcal{L}(H)$ .
  - a) Si  $A$  es autodjunto, entonces  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .
  - b) Si  $A$  es unitario, entonces  $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .
6. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
  - a) Si  $\exists (x_n)_n \subset E$ ,  $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$  tal que  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$ , entonces  $\lambda \in \sigma(T)$ .
  - b) Si  $E$  es Hilbert,  $T$  normal y  $\lambda \in \sigma(T)$  entonces  $\exists (x_n)_n \subset E$ ,  $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$  tal que  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$
  - c) Si  $E$  es Hilbert y  $T$  normal,  $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / T - \lambda I \text{ no es acotado inferiormente}\}$
7. Si  $1 < p < \infty$ , sea  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots)$$

- a) Probar que  $T$  no es compacto.
- b) Probar que  $T^2$  sí es compacto.
- c) Calcular  $\sigma(T)$

8. Sea  $V : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  el operador de Volterra dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(y) dy$$

Calcular  $\sigma(V)$

9. Sea  $\varphi \in L^\infty[0, 1]$  y sea  $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$  el operador de multiplicación. Hallar  $\sigma(M_\varphi)$  en los siguientes casos:

a)  $\varphi$  continua en  $[0, 1]$ .

$$b) \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

10. Sea  $A \in \mathcal{L}(X)$  un operador acotado.

a) Probar que  $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathcal{L}(H)$ .

b) Probar que si  $A$  y  $B$  conmutan, entonces vale la fórmula:

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

c) Si  $X$  es un espacio de Hilbert complejo, y si  $A$  es autoadjunto probar que  $e^A$  es autoadjunto y positivo, y que  $e^{iA}$  resulta unitario.

11. Sea  $X$  un espacio de Banach. Supongamos que  $\sigma(A) = K_1 \cup K_2$ , donde  $K_1$  y  $K_2$  son dos compactos disjuntos. Probar que el operador  $A$  se puede descomponer como  $A = A_1 \oplus A_2$  donde  $\sigma(A_1) = K_1 \cup \{0\}$  y  $\sigma(A_2) = K_2 \cup \{0\}$ .

12. Si  $T$  compacto, autoadjunto y  $f \in C(\sigma(T))$  tal que  $f(0) = 0$ , entonces  $f(T)$  es compacto.

13. Sea  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operador autoadjunto.

a)  $T \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(T) \subset [0, +\infty) \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{L}(H)$  tal que  $T = A^*A$ .

b)  $T$  autoadjunto entonces existen  $T^+, T^- \geq 0$  tales que  $T = T^+ - T^-$  y  $T^+T^- = T^-T^+ = 0$ . Concluir que en  $\mathcal{L}(H)$  todo operador es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores positivos.

c)  $T \geq 0, n \geq 1$  entonces existe un operador  $A \geq 0$  tal que  $A^n = T$ , y  $\|A\|^n = \|T\|$ .

14. Sea  $A \in \mathcal{L}(H)$  autoadjunto con  $\|A\| \leq 1$ . Probar que existe un operador unitario  $U$  tal que  $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$ . (Sugerencia: considerar la función  $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2}$ ). Concluir que en  $\mathcal{L}(H)$  todo operador es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores unitarios.