Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2010

Práctica 5 - Operadores Acotados en Espacios de Hilbert

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|, \qquad \|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T, S \in \mathcal{L}(H)$, $T^*, S^* \in \mathcal{L}(H)$ sus operadores adjuntos.

   a) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$.

   b) $(ST)^* = T^* S^*$.

   c) $\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

3. Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se verifica:

   a) $\ker(T) = R(T^*)^\perp$

   b) $(\ker(T))^\perp = \overline{R(T^*)}$

   c) $\ker(T^*) = R(T)^\perp$

   d) $(\ker(T^*))^\perp = \overline{R(T)}$

4. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup_n |\langle T_n x, y\rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

5. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

   a) T es una isometría

   b) $T^*T = I$

   c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.*

a) *T es autoadjunto si $T^* = T$*

b) *T es normal si $T^*T = TT^*$*

c) *T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T^*$*

d) *T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in H$*

6. *a*) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación. Calcular M_φ^* , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0,1] : M_\varphi$ es unitario $\}$.

   b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A^*, probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A$ es unitario $\}$.

7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

   a) T es unitario.

   b) T^* es unitario.

   c) T es una isometría suryectiva.

   d) T y T^* son isometrías.

8. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:

   a) $\|T^2\| = \|T\|^2$

   b) $\ker(T) = \ker(T^*)$

   c) $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.

   d) $T^2 = 0 \implies T = 0$.

9. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$. Son equivalentes:

   a) $P^* = P$

   b) P es normal

   c) $\|P\| = 1$

   d) $\ker(P) = R(P)^\perp$

10. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

    a) T^*T y TT^* son positivos.

    b) Si T es positivo, S^*TS es positivo.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^\perp$.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.

    a) Si H es un espacio sobre $\mathbb{C}$, $\langle Tx, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in H$ entonces $T = 0$.

    b) Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.

    c) Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).

    d) T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

13. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.

    a) Si $T_n x \to Tx \ \ \forall x \in H$ entonces $T_n^* x \to T^* x \ \ \forall x \in H$.

    b) Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

14. Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

    a) T es autoadjunto
    b) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
    c) $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
    d) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \quad \forall x \in H$
    e) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H$

Definición:*Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(\ker T)^\perp}$ es isometría.*

15. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si T^*T es proyector.

16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio de H.

17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n x \neq 0$.

Definición:*Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Diremos que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge, y notaremos*

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}.$$

18. Probar que:

    a) $\|T\|_2$ no depende de la base elegida.
    b) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ y $\|T\| \leq \|T\|_2$.
    c) $\langle S, T\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n\rangle$, es un producto interno que define $\|\cdot\|_2$ y hace de los operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

19. Probar que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y que si T es de Hilbert-Schmidt y $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces ST y TS son de Hilbert-Schmidt con $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$ y $\|TS\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$.

20. a) Si $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ es un operador integral, probar que entonces K es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|K\|_2$.
    b) >Bajo qué condición sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ el operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $Tx = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Hilbert-Schmidt?
    c) Dar un ejemplo de un operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.