Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2010

Operadores Acotados- Adjunto

Principio de acotación uniforme, Teorema de la aplicación abierta, Teorema del gráfico cerrado

1. Sean E y F espacios normados, $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:
   (i) T es continuo.
   (ii) T es continuo en 0.
   (iii) T es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

2. Sean E y F espacios normados, $T : E \to F$ lineal. Entonces

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E,\ \|x\| < 1\}\\ &= \sup\{\tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E,\ x \neq 0\}\end{aligned}$$

   y $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ una matriz simétrica. Considerar a A como un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, utilizando en $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea. Probar que $\|A\| = \text{máx}\{|\lambda| :\ \lambda$ es un autovalor de $A\}$.

4. **Operadores Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell^p \to \ell^p$, $T : \ell^p \to \ell^p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

   a) Probar que $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es inyectivo. Calcular $\|S\|$.
   b) Probar que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ y es suryectivo. Calcular $\|T\|$.
   c) $TS = I$, $ST \neq I$.

5. **Operadores de Multiplicación:**

   a) Si $\varphi \in C[0,1]$, sea $M_\varphi : C[0,1] \to C[0,1]$ definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

   Probar que $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0,1])$ y calcular su norma.

   b) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, probar que M_φ, es un operador acotado de $L^p[0,1]$ en $L^p[0,1]$ y calcular su norma.

6. **Operadores integrales:** Si $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$, sea $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\ dt$$

   Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$

7. **Operadores de Convolución** Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y definamos

$$C_g(f) = f * g$$

entonces $C_g \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n))$ y $\|C_g\| = \|f\|_{L^1}$.

8. Sea $\alpha = (\alpha_n)_n$ una sucesión de números complejos, $1 \leq p < \infty$, definimos $M_\alpha : \ell^p \to \ell^p$ por $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:

   a) M_α está bien definida $\Leftrightarrow$ $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$

   b) M_α es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\alpha_n \neq 0 \ \forall n$

   c) M_α es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $(\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$

   d) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$

9. Si $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

10. Sea E un espacio de Banach, sean $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$.

    (i) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

    (ii) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$ entonces $A_n B_n \to AB$

11. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| < 1$. Probar que $(I + A)$ es inversible, $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y que su inversa viene dada por

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X)$. Probar tambien que

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

12. (i) Sea X un espacio de Banach y sea $T, \ T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Probar que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| \leq 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible, $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, y

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

    (ii) $\{T \in \mathcal{L}(X), \ T \text{ inversible}\}$ es abierto en $\mathcal{L}(X)$.

13. Sean E y F espacios de Banach y sean $x_n, x \in E, \ A_n, A \in \mathcal{L}(E, F) \ \forall n \in \mathbf{N}$. Si $x_n \to x$ y $A_n \to A$ entonces $A_n x_n \to Ax$

14. Sea E un espacio de Banach, sea $P : E \to E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P), \ T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si S y T son cerrados.

15. Un subespacio cerrado S está complementado si y sólo si existe una proyección P de rango S (una proyección es un operador tal que $P^2 = P$).

16. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles, $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \to A$, entonces $\|A_n^{-1}\| \to \infty$.

17. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists\, Q \in \mathcal{L}(E)/\ Q^2 = Q,\ R(Q) = S$.

18. Sea E el espacio de Banach real $L^1((1, +\infty))$, sea $T : E \to E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que T es acotado pero no abierto.

    (Sug: $0 \in T(B(0,1))$ no es punto interior)

19. (i) Si $1 \leq p < \infty$, S y T son los shifts definidos en el ejercicio 4, calcular S^* y T^*.

    (ii) Si $J : \ell^2 \to c_0,\ \ J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J^*.

20. Caracterizar M_φ^*, siendo M_φ los operadores de multiplicación por φ definidos en el ejercicio 5. (Tener en cuenta las caracterizaciones del dual de $C([0,1])$ y L^p)

21. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)^* = B^* A^*$.

22. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

    a) $\|A\| = \|A^*\|$

    b) Si A es inversible entonces A^* es inversible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

    c) La aplicación $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ dada por $\Phi(A) = A^*$ es continua.

23. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \to L^p(\Omega), \qquad e : L^p(\Omega) \to L^p(\tilde{\Omega}),$$

    dados por $\rho(u) = u\,|_\Omega$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ^*, e^*.

24. Sean E un espacio de Banach, F un subespacio de E, S un subespacio de E^*. Probar que:

    a) (i) $F^\perp = \{\gamma \in E^* : \gamma(x) = 0\ \forall\, x \in F\}$ es un subespacio cerrado de E^*.

    (ii) ${}^\perp S = \{x \in E : \gamma(x) = 0\ \forall\, \gamma \in S\}$ es un subespacio cerrado de E.

    (iii) ${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}$

    (iv) $({}^\perp S)^\perp \supset \overline{S}$

    b) Sea c_{00} el subespacio de $\ell_\infty = (\ell_1)^*$ de sucesiones finitas. Probar que $({}^\perp c_{00})^\perp$ contiene estrictamente a $\overline{c_{00}}$

25. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que:

    a) $R(A)^\perp = \ker(A^*)$

    b) ${}^\perp R(A^*) = \ker(A)$

    c) $\overline{R(A)} = {}^\perp \ker(A^*)$

    d) $R(A^*) \subseteq (\ker(A))^\perp$

26. Sean E, F espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, entonces

$$\operatorname{dist}(x, \ker(T)) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^\perp,\ \|\varphi\| \leq 1\}$$

27. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ un subespacio y $\Phi : E^* \to F^*$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$. Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

28. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces $\widehat{T} : E/\ker(T) \to F$, dado por $\widehat{T}([x]) = T(x)$, es lineal, continuo y $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

29. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)^* \overset{1}{=} S^{\perp}$$

$$E^*/S^{\perp} \overset{1}{=} S^*$$

30. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T^*)$ es cerrado y

$$R(T^*) = (\ker(T))^{\perp}$$

Definición: Sea E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si $\exists c > 0 /\ \|Tx\| \geq c\,\|x\| \quad \forall x \in E$.

31. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que:

   a) Si T es acotado inferiormente entonces $R(T)$ es cerrado.

   b) T acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si T inversible.

32. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

   a) Probar que V no es acotado inferiormente.

   b) Caracterizar V^*.

Definición: Sea E, F dos espacios de Banach, $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que T_n converge fuertemente a T si para cualquier $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \to T(x)$.

33. Si T_n tiende fuertemente a T y x_n tiende a x entonces $T_n(x_n) \to T(x)$.

34. Si T_n tiende a T fuertemente y S_n tiende a S fuertemente, entonces T_nS_n tiende a TS fuertemente.

35. Sean E, F dos espacios de Banach. Sean $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $A_n(x)$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Probar que existe un $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $A_n \to A$ fuertemente.

36. En el espacio ℓ^2 se definen las siguientes sucesiones operadores

$$A_n x = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$$

$$B_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

Decidir en cada caso si la sucesión tiende a cero en norma o fuertemente.

37. Sea X un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, entonces las normas son equivalentes.

38. Sea $S \subset E$ un subespacio complementado de codimensión infinita. Probar que existe $T : E \to E$ lineal no acotada tal que $ker(T) = S$. En particular, para operadores no vale: $ker(T)$ cerrado $\Rightarrow T$ continuo.

    Sugerencia: tomar un funcional no continuo en el complementado de S.

    Definición: Sea E, F dos espacios de Banach, $T : D(T) \subset E \to F$ un operador lineal no acotado (donde $D(T)$ denota el dominio de T). Decimos que T es cerrado si $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, implican que $x \in D(T)$ y $T(x) = y$.

39. *a*) T es cerrado si y sólo si $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$ es cerrado en $E \times F$.

    b) T es cerrado si y sólo si $D(T)$ resulta un espacio de Banach con la norma $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

    c) Si T es cerrado y $D(T)$ es cerrado, entonces $T \in \mathcal{L}(D(T), F)$.

    d) Probar que el operador $T : D(T) = C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$ dado por $T(x) = x'$ es cerrado.