

# Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2010

## PRÁCTICA 2

### FUNCIONALES LINEALES - TEOREMA DE HAHN-BANACH

1. Si  $E$  un espacio vectorial,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  lineal,  $\varphi \neq 0$ , entonces  $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{C}$ .
2. a) Sean  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ , según sea el cuerpo de escalares de  $E$ ) una forma lineal. Son equivalentes:
  - 1)  $\varphi$  es continua
  - 2)  $\varphi$  es continua en 0
  - 3)  $\varphi$  es acotada (i.e.  $\sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty$ )b)  $\varphi$  es continua si y sólo si  $\ker \varphi$  es cerrado.
3. Sean  $E$  un espacio vectorial normado sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal.
  - a) Si  $\varphi$  es no acotada entonces toma todos los valores reales en cualquier entorno de 0.
  - b) Si  $\varphi$  no es acotada entonces  $\ker \varphi$  es denso.
  - c)  $\varphi$  es continua si y sólo si  $\forall c \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x : \varphi(x) < c\}$  y  $\{x : \varphi(x) > c\}$  son abiertos.
  - d) Si  $A \subset E$  tiene interior no vacío y  $\exists a \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) \geq a \forall x \in A$ , entonces  $\varphi$  es continua.
4. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  lineal tal que para toda sucesión  $(x_n)_n \subset E$  convergente a 0, resulta  $(\varphi(x_n))_n$  acotada. Demostrar que  $\varphi$  es continua.
5. Sea  $E^* = \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ es lineal y continua}\}$ .

a) Entonces

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

es una norma sobre  $E^*$ , que hace de  $E^*$  un espacio de Banach.

b) Probar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{E^*} &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

$$\text{y } |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|.$$

6. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

- a)  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- b)  $\varphi : L^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- c)  $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$
- d)  $\varphi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$
- e)  $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$

$$f) \varphi : \ell^1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$$

$$g) \varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$$

$$h) \varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$$

7. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $\varphi \in E^*$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $y \in E$ ,  $y \notin \ker \varphi$ . Probar que:

a)  $E = \ker \varphi \oplus \langle y \rangle$ , donde  $\langle y \rangle$  significa el subespacio generado por  $y$ .

$$b) d(y, \ker \varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$$

c) Si  $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$  entonces  $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$ .

8. a) Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.

b) Sea  $C_0(\mathbb{R})$  el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que  $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$  con  $f(t) = 0 \forall t \notin [a, b]$ . Demostrar que  $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$  es un espacio vectorial normado. Además, si definimos  $\varphi : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(f) = \int f(t) dt$  probar que  $\varphi$  resulta una funcional lineal no acotada.

9. Sea en  $c_0$  la familia  $\{e^n\}_{n \geq 1}$  de sucesiones definidas por  $e_i^n = \delta_{ni}$  y sea  $x^0$  la sucesión dada por  $x_i^0 = \frac{1}{i}$

a) Verificar que  $A = \{x^0, e^1, e^2, \dots, e^n, \dots\}$  es un conjunto l.i. de  $c_0$

b) Sea  $B$  una base algebraica de  $c_0$  que contenga a  $A$ . Llamemos  $\{b^j\}_{j \in J}$  al conjunto  $B \setminus A$ .

Luego todo  $x \in c_0$  se escribe de manera única como

$$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_j b^j$$

donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

Si  $f : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  se define por  $f(x) = \alpha_0$ , probar que  $f$  es una funcional lineal no continua.

10. Probar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe un funcional lineal no continuo.

11. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $\varphi, \psi \in E^*$  tales que  $\varphi \cdot \psi \equiv 0$ , entonces  $\varphi \equiv 0$  ó  $\psi \equiv 0$ .

12. a) Sea  $y \in \ell^1$ . Si definimos  $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

resulta  $\varphi \in c_0^*$  con  $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$ .

- b) Recíprocamente, dada  $\varphi \in c_0^*$ , mostrar que la sucesión dada por  $y_n = \varphi(e_n)$ , donde  $e_n = (\delta_k^n)_{k \geq 1}$  pertenece a  $\ell^1$ .
- c) Probar que las aplicaciones definidas en (i) y (ii) son una la inversa de la otra, y deducir que  $c_0^* \cong \ell^1$  (isomorfismo isométrico).
- d) De manera análoga, probar que  $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$  y que  $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ , si  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
13. a) Caracterizar el dual de  $c$ .
- b) Sea  $\varphi : c \rightarrow \mathbb{C}$  la funcional  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  y sea  $\tilde{\varphi} : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$  una extensión dada por el teorema de Hanh-Banach. Probar que  $\tilde{\varphi}$  no puede representarse en la forma:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \quad y \in \ell^1$$

14. Sea  $E$  un espacio de Banach y  $S \subset E$  un subespacio cerrado.

- a) Si  $S$  tiene dimensión finita, probar que  $S$  es complementado.
- b) idem (a) si  $S$  tiene codimensión finita.

15. a) Sea  $E$  un espacio vectorial normado, entonces  $\forall x \in E$

$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$

- b) Sea  $E$  un espacio vectorial normado, sean  $x, y \in E$  tales que  $\varphi(x) = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in E^*$ , entonces  $x = y$ .

16. Sean  $E$  un espacio vectorial normado y  $S \subset E$  un subespacio.

- a) Si  $x \in E$  y  $d = d(x, S) > 0$  entonces  $\exists \varphi \in E^*$ ,  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\varphi(x) = d(x, E)$ ,  $\varphi(y) = 0 \quad \forall y \in S$ .

(Sug: Sea  $H = \langle S, x \rangle$ , definir  $\psi : S \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\psi(\lambda x + y) = \lambda d$ ,  $\forall y \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ )

- b) Probar que

$$\overline{S} = \bigcap \{ \ker(\phi) / \phi \in E^* \mid S \subset \ker(\phi) \}.$$

En particular, si  $S$  no es denso en  $E$  entonces existe  $\phi \in E^*$ ,  $\phi \neq 0$  tal que  $\phi|_S \equiv 0$ .

17. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $(x_n)_n \subset E$ . Un punto  $y_0$  es límite de combinaciones lineales  $\sum_{j=1}^N c_j x_j$  si y sólo si  $\forall \varphi \in E^*$  que verifique que  $\varphi(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , vale que  $\varphi(y_0) = 0$ .

18. Sean  $E, F$  espacios normados. Probar que  $E \times F$  es un espacio normado, con  $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{1/p}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Probar que  $(E \times F)_p$  es isomorfo a  $(E \times F)_q$  si  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

19. Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre  $(E \times F)^*$  y  $E^* \times F^*$ .

20. Sea  $E$  un Banach y  $S$  un subespacio de  $E$ , probar que

$$\overline{S} = \bigcap \{ \ker(\phi) / \phi \in E^* \mid S \subset \ker(\phi) \}.$$