Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2010

PRÁCTICA 1

ESPACIOS DE BANACH

1. *a*) Si $1 \leq p \leq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado (más aún: si $p < \infty$, es denso).

   b) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio, entonces $\overline{S}$ es un subespacio.

   c) Sean E un espacio de Banach, S un subespacio cerrado de E, entonces S, con la norma inducida por E, es un espacio de Banach.

2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $B \subset V$ un subconjunto que satisface las siguientes propiedades:

   a) $0 \in B$

   b) B es convexo.

   c) B es equilibrado, i.e., si $x \in B$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces $\lambda \cdot x \in B$.

   d) B es absorvente, i.e., para todo $x \in V$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{x}{\lambda} \in B$

   e) Si $x_n = \lambda_n x \in B \; \forall \; n \in \mathbb{N} \; (0 \leq \lambda_n \leq 1)$ y $\lambda_n \to 1$, entonces $x \in B$.

   f) No existe ninguna recta que pasa por el origen contenida en B, o sea, dado $x \neq 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \notin B$.

   entonces, si definimos

$$\|x\| = \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B\right\}$$

   V resulta un espacio normado, y $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$.

3. *a*) Sea K un espacio métrico (topológico) compacto, entonces $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ continuas}\}$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

   es un espacio de Banach.

   b) Si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$, $C(K)$ es separable.

4. Sea $(E, \| \;\|)$ un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

   a) E es Banach

   b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo

   c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo

   DEFINICIÓN: Sean E un espacio vectorial, $\| \;\|$ y $\| \;\|'$ dos normas definidas sobre E. Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \;\; \forall x \in E$.

5. *a*) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.

b) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre E son equivalentes.

c) Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre E hace de E un espacio de Banach.

d) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado.

6. Si E es un espacio vectorial normado de dimensión finita, demostrar que $B(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.

7. Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\forall x \notin F$ $\exists y_0 \in F$ que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Sugerencia. Ver que $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$.

8. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un subespacio cerrado propio ($F \neq E$), $0 < a < 1$, entonces $\exists x_a \in E$, $\|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$.

(Sug: Sea $x \in E - F$, $d = d(x, F) > 0$, tomar $y_0 \in F$ tal que $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$ y probar que $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$ es el que sirve).

9. Sea E un espacio vectorial normado, $B(0,1)$ es compacta si y sólo si $\dim E < \infty$.

10. a) Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio. S tiene interior no vacío si y sólo si $S = E$.

b) Probar que un espacio de Banach E de dimensión infinita no puede tener una base (algebraica) numerable (en otras palabras, $\dim E > \aleph_0$).

11. Demostrar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

12. Sea E un espacio vectorial normado, E es de Banach si y sólo si $\forall (x_n)_n \subset E$ vale que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

13. Sean E y F espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$.

a) $(E \times F, \|\ \|)$ es un espacio vectorial normado.

b) Si E y F son espacios de Banach, $E \times F$ resulta un espacio de Banach.

c) La inyección $J_E : E \to E \times F$ dada por $J_E(x) = (x, 0)$ y la proyección $P_E : E \times F \to E$ dada por $P_E(x,y) = x$ son ambas continuas. Lo mismo vale para J_F y P_F.

14. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado.

a) Probar que E/S es un espacio vectorial.

b) Si definimos en E/S la norma $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$, probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.

c) Si $\Pi : E \to E/S$ es la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$, ver que Π es lineal, que $\|\Pi\| \leq 1$ y que Π es abierta.

d) Probar que E/S es un espacio de Banach.

15. Sean E un espacio de Banach, $S, T \subset E$ subespacios cerrados con $\dim T < \infty$ entonces $S + T$ es cerrado.

16. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por Ω entendemos un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$.

a) $C^1(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$.

b) $C^r(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum \|f_{x_{i_1},\dots,x_{i_r}}\|_\infty$ $(r \in \mathbb{N})$.

c) $Lip(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.

d) $C^\alpha(\overline{\Omega})$ $\quad \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\quad 0 < \alpha < 1$. ¿Qué sucede si $\alpha > 1$?

e) El Espacio de las Funciones de Variación Acotada.

$$BV([0,1]) = \{f \in C([0,1]) / \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}.$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$