Práctica 6

1. Hallar la descomposición $L\,U$ para las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar el rango y el espacio nulo de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Hallar la descomposición $Q\,R$ de A.

   b) Resolver el problema de mínimos cuadrados $Ax = b$, siendo $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Encontrar la solución mínima de $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

5. Calcular la pseudoinversa A^+ de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   entonces $A^+ \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ es igual a

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. Hallar A^+.

   b) Si A tiene columnas ortonormales, ¿cuál es su pseudoinversa?