Práctica 5

1. Hallar autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinar si cada una de las matrices del ejercicio anterior es o no diagonalizable. En los casos que lo sea hallar una base de autovectores.

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas P y $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles tales que

   $D_1 = P^{-1}AP$ y $D_2 = R^{-1}AR$ sean diagonales. ¿Vale $D_1 = D_2$?

4. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   a) Probar que el polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$, donde $tr(A)$ indica la traza de A.

   b) Probar que tiene dos autovalores distintos si $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

   c) ¿En qué caso tiene un autovalor doble? ¿Cuándo no tiene autovalores reales?

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar que A es diagonalizable.

b) Calcular A^{100}.

c) Si $v = (3, 4, -1)$, calcular $A^{30}v^t$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calcular los autovalores y los autovectores de A. Verificar que no es diagonalizable.

   b) Escribir al vector $v = (-2, 2, 3)$ como combinación lineal de los autovectores y calcular A^9v^t.

7. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.

   b) Para el valor de a hallado, encontrar $b \in \mathbb{R}$ de manera que A no sea diagonalizable.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, sabiendo que $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (2, 6, 0)$ y $v_3 = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A:

   a) Probar que A es diagonalizable y hallar la matriz que la diagonaliza.

   b) Calcular los autovalores de A y los valores de a, b y c.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$, si $\lambda = 1$ es autovalor y $v = (1, 1, 1)$ es un autovector asociado

    a) Calcular los valores de a, b y c.

    b) Calcular A^{35}

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ una matriz cuyos autovalores son 0,3 y 4.

a) ¿Es diagonalizable? ¿Es inversible?

b) Calcular los autovalores de $B = 5A^t - 2I$

c) Calcular los autovalores de $C = (A + 3I)^3$

d) Probar que $A - I$ es inversible y calcular sus autovalores.

e) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $a.A - 5I$ no es inversible.

12. Hallar una base ortonormal de autovectores para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^{100}

13. Un país cuya población es constante está dividido en dos regiones A y B. Cada año, 1 de cada 10 habitantes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 de la región B se muda a la región A. Actualmente viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

    a) Hallar la matriz de transición para este proceso.

    b) Determinar si existe un estado de equilibrio.

    c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.