Práctica 4

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{pmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ la matriz en $\mathbb{R}^{3x3}$ tal que $detA = 5$ calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3g+a & 3h+b & 3i+c \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} a & 2c & b \\ d & 2f & e \\ g & 2i & h \end{pmatrix}$$

$d)\ 3A^2$ $\qquad e)\ -2A^t$ $\qquad f)\ 5A^{-1}$ $\qquad g)\ -(A^t)^4$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ 1 & 2 & -1 \\ -x & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que $detB = 3$, hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $det(2A^tB^2) = 18$

5. Dadas las matrices A y B en $\mathbb{R}^{3x3}$ tales que $detA = 3$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcular:

a) $det(AB + 2A)$

b) $det(3A^{-1} - 5A{-}1B)$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

7. a) ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz ortogonal?

   b) Hallar $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ ortogonal tal que: $detA = -1$.

8. Si A y B son dos matrices en $\mathbb{R}4x4$ tales que $detA = 8$, B es inversible y $A.B = detB.I$, calcular $detB$

9. Encontrar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A.x = x$ admite solución no trivial siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

10. *Regla de Cramer en* 2×2*:*

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $det(A) = ad - bc \neq 0$. Probar que la solución del sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

es (x_1, x_2) con

$$x_1 = \frac{det \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}}{det(A)} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{det \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}}{det(A)}.$$