PRÁCTICA 3

1. a) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.
   b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar v tal que $||v|| = ||u||$ y $\langle u, v\rangle = 0$ y
   c) Sea $u = (-2, 1)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $||v|| = ||u||$ y $\langle u, v\rangle = 0$.
   d) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $||v|| = ||u||$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

2. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$:
   a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ y $u \neq 0$, entonces $v = w$.
   b) Si $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall v$, entonces $u = 0$.

3. Sean u, v y w vectores tales que:

$$\langle u, v\rangle = 2 \qquad \langle v, w\rangle = -3 \qquad \langle u, w\rangle = 5 \qquad ||u|| = 1 \qquad ||v|| = 2 \qquad ||w|| = 7$$

   Calcular:

   a) $\langle u + v, v + w\rangle$ *b)* $\langle 2v - w, 3u + 2w\rangle$ *c)* $\langle u - v - 2w, 4u\rangle$

   d) $||u + v||$ *e)* $||2w - v||$ *f)* $||u - 2v + 4w||$

4. a) Sean $u = (1, 2)$ y $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.
   b) Sean $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

   Probar que, $\forall\, w \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $w = \langle w, u\rangle u + \langle w, v\rangle v$.

5. a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1); (1, 1, 1)\}$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.
   b) Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$.

6. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base:
   a) del plano $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$
   b) de $S = < (1, 0, -1) >$

7. Sea la recta $S = \langle(3,4)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

   a) $p(-4,3)$, $p(3,4)$ y $p(2,1)$
   b) Una fórmula para $p(x_1, x_2)$
   c) $[p]_E$, (E la base canónica)
   d) $S^\perp$
   e) La distancia de los puntos $(-4,3), (3,4)$ y $(2,1)$ a la recta S
   f) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3)/\ 2x_1 - x_2 = 0\}$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

   a) Una base $\mathcal{B}$ ortonormal del subespacio S.
   b) $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ la matriz que tiene por columnas a los vectores de $\mathcal{B}$.
   c) Verificar que $[p]_E = M.M^t$.

9. Hallar una base ortonormal y el complemento ortogonal para cada uno de los subespacios que siguen:

   a) $S_1 = \{\lambda(1,2,1);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
   b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2/\ x_1 + 2x_2 = 0\}$
   c) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3/\ 3x_1 + x_2 = 0\}$

10. Sea $\mathcal{B}'$ la base hallada en el ejercicio 4 a) Calcular $Q = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, siendo $\mathcal{B}$ otra base ortonormal. Verificar que $QQ^t = Id$.

11. Encontrar una tercera columna para que la matriz Q sea ortogonal siendo $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix}$.

    ¿Cuántas soluciones hay? Interprete geométricamente.

12. Comprobar que la siguientes matrices son ortogonales y encontrar su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

13. Hallar la recta $y = ax + b$ que ajusta por cuadrados mínimos la tabla y calcular el error $\sum (y_k - (ax_k + b))^2$.

$$\begin{pmatrix} x_k & 0 & 1 & -1 & 2 \\ y_k & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

14. Mismo ejercicio con la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} x_k & 6 & 4 & 8 & 5 & 3.5 \\ y_k & 6.5 & 4.5 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Estimar el valor de y correspondiente a $x = 7.5$.

15. Ajustar una parábola por el método de los cuadrados mínimos de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2.1 & 3.3 & 3.9 & 4.4 & 4.6 & 4.8 & 4.6 & 4.2 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Rta: $y = 0.9433 + 1.3507x - 0.1189x^2$.