Práctica 2

1. Analizar si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

   a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\}$

   b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0; \ -x + y - z = 0\}$

   c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x.y = 0\}$

2. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

   a) $S = \{(1, 1) \ (2, -1)\}$ en $\mathbb{R}^2$

   b) $S = \{(1, 2, 3) \, , \ (2, 3, 1) \, , \ (1, 1, 4) \, , \ (5, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$

   c) $S = \{(1, 0, -1) \ (1, 1, 0) \ (1, 1, 1)\}$en $\mathbb{R}^3$

   d) $S = \{(1, 0, -1) \ (1, 1, 0) \ (1, 2, 1)\}$en $\mathbb{R}^3$

3. Sea $S = < (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) >$, determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$

4. ¿Para que valores de a, $\quad v = (4, a, -2)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 3, -1) \ v_2 = (2, -1, 0)$?

5. Decidir si las siguientes sucesiones de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$

   a) $\{(1, 0, 1), \ (1, 2, 0)\}$

   b) $\{(1, 0, 1), \ (1, 2, 0), \ (1, 0, 1)\}$

   c) $\{(1, 1, 1), \ (0, 1, 1), \ (0, 0, 1)\}$

   d) $\{(\pi, 0, 0), \ (0, \ \sqrt{2}, 0), \ (0, 0, \ \sqrt{3})$

   e) $\{(1, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 0, 1), \ (1, 2, 3)\}$

6. Hallar bases y dimensión de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

   a) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 0\}$

   b) $T = \langle (1, 1), \ (0, -2) \rangle$

   c) $W = \langle (1, 1), \ (0, -2), \ (1, 3) \rangle$

   d) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

   e) $T = \langle (1, 1, 1), \ (0, -2, 0) \rangle$

f) $W = \langle (1,1,1),\ (0,-2,0),\ (2,0,2) \rangle$

g) $U = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

7. Sea en R^2 la base:

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$$

a) Hallar las coordenadas en la base canónica del vector que en la base $\mathcal{B}$ tiene coordenadas $(1,-2)$

b) Hallar las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector que en la base canónica tiene coordenadas $(1,-2)$

8. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}.$$

Calcular la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$.

9. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B}_1 = \{(3,5),\ (1,2)\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),\ (0,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_3 = \{(-2,1),\ (7,-4)\}.$$

Hallar $C = C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}\, C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ y verificar que $C = C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}$.

10. a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$

b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$; $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

c) Sean f , $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(-1,0,0) = (1,2,1) \quad f(2,1,0) = (2,1,0) \quad f(1,0,1) = (1,2,1)$$

$$g(1,1,1) = (1,1,0) \quad g(2,2,-1) = (3,-1,2) \quad g(3,2,1) = (0,0,1)$$

Determinar si $f = g$.

11. Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ de las siguientes transformaciones lineales

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1,0)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,0)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_2+x_3)$

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

12. Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$ y las bases

$$B = \{(1, 1), (-1, 1)\} \qquad B' = \{(1, 0), (1, -1)\}$$

Calcular $|f|_{BB'}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (-y + z, y, z)$.

a) Hallar $\{v_1, v_2\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$ y $\{v_3\}$ base de $\mathrm{Nu}(f)$.

b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $M = [f]_{\mathcal{B}}$.

Sea $\mathcal{B} = \{(1, 2); (2, 3)\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Hallar la matriz asociada a f en la base canónica.