Práctica 1

1. Dadas las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

   a) determinar a_{31} y a_{22}.

   b) calcular $3A + 2B$, $A - B$, $\frac{1}{2}(A + B)$.

   c) hallar $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $3A + 2B + D$ sea la matriz nula.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \ \text{y} \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

   calcular los siguientes productos:
   a) $C \cdot B$, *b)* $A \cdot C^t$,
   c) $C \cdot C^t$ *d)* $C^t \cdot C$.

3. a) Hallar dos matrices A y B en $\mathbb{R}^{2x2}$ tales que $A.B = 0$.

   b) ¿Es posible hallar $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

   c) Sean $A, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \cdot D = A \cdot C$. ¿Debe ser $C = D$? ¿Y si $A \neq 0$?

   d) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
   Calcular $(A + B)^2$, $A^2 + 2A \cdot B + B^2$, $A^2 - B^2$, $(A - B) \cdot (A + B)$, $(A + B) \cdot (A - B)$.
   ¿Qué conclusiones puede sacar?

   e) Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, $A \cdot B$ tiene una fila de ceros? (siempre que $A \cdot B$ esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

   a) $$\begin{cases} x + y + z & = & -2 \\ 3x + 3y - z & = & 6 \\ x - y + z & = & -1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2x + y + z & = & 1 \\ x - 2y + z & = & 5 \\ -3y - z & = & 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u + v + w & = & 0 \\ u + 2v + 3w & = & 0 \\ 3u + 5v + 7w & = & 7 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

5. Dado el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

   a) encontrar todas las soluciones,
   b) ¿Cuáles satisfacen además la condición $x + y + z = 3$?
   c) ¿Cuáles satisfacen además la condición $2x - y - 2z = 2$?

6. Para cada uno de los dos sistemas siguientes

$$\begin{cases} ax + 2y & = & 0 \\ x + ay + z & = & 0 \\ 2y + az & = & 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} ax + 4y & = & 0 \\ 2x + ay + 2z & = & 2 \\ 4y + az & = & 0 \end{cases},$$

   Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que :

   a) el sistema no admita solución,
   b) el sistema admita solución única (y hallarla)
   c) el sistema admita infinitas soluciones (y hallarlas todas).

7. ¿Para qué valores de c es compatible el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ c \end{pmatrix}?$$

8. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

   a) hallar las soluciones de $A \cdot X = b$ para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Hallar $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot B = I$.

   c) Verificar que para la matriz B hallada arriba vale que $B \cdot A = I$.

9. Encontrar las inversas de las siguientes matrices (si existen)

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \qquad f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}, \quad g)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R},$$

$$h)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \quad i)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j)\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$$

10. Tres especies de colonias de bacterias coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan con tres alimentos. Se supone que una colonia de bacterias de la especie j consume una cantidad a_{ij} del i−ésimo alimento por día, según la siguiente matriz de datos

$$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

    Por ejemplo, cada colonia de bacterias de la especie 3 consume por día 1 cantidad del alimento 1, 4 cantidades del alimento 2 y 6 cantidades del alimento 3.

    a) Si hay 1000 colonias de bacterias de la especie 1, 2000 colonias de bacterias de la especie 2 y 5000 colonias de bacterias de la especie 3, ¿cuántas cantidades del alimento 2 se consumen al día?

    b) Si se proveen diariamente 15000 unidades del alimento 1, 30000 del alimento 2, 44000 del alimento 3 y todo el alimento provisto se consume (y ninguna colonia "queda con hambre"), ¿puede determinarse la cantidad de colonias de bacterias de cada especie? ¿Cuál es la cantidad total de colonias de bacterias?

11. Se tienen 2 urnas numeradas **1** y **2** con bolillas de dos tipos, numeradas **1** y **2** también, en cada una de ellas. Llamamos p_{ij} a la probabilidad de obtener una bolilla j si se extrae al azar una bolilla de la urna i. Por ejemplo: p_{12} =probabilidad de obtener una bolilla **2** al hacer una extracción de la urna **1**.

    a) Sea $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. Entender por qué $p_{11} + p_{12} = 1$ y $p_{21} + p_{22} = 1$.

    b) Sea $P^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Encontrar la relación entre a_{ij} y p_{kl}.

    c) Probar que P^2 también cumple $a_{11} + a_{12} = 1$, $a_{21} + a_{22} = 1$.

    d) Describir un experimento con dos resultados posibles cuyas probabilidades sean los coeficientes de la primera fila de P^2. Idem con la segunda fila.