

### Práctica 8: Espacios vectoriales con producto interno

- Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno sobre  $V$ . Probar:
  - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ .
  - $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$ .
  - $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in V \Rightarrow y = z$ .
- Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno. Probar que  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$  si y sólo si  $\{x, y\}$  es un conjunto linealmente dependiente.
- Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.
  - $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$ .
  - $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$ .
  - $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ .
  - $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1$ .
  - $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$ .
  - $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$ .
  - $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3 - x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ .
- Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$ 

$$\Phi(x, y) = a x_1y_1 + b x_1y_2 + b x_2y_1 + b x_2y_2 + (1+b) x_3y_3$$
 es un producto interno en  $\mathbb{R}^3$ .
- Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ .
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K, \langle x, y \rangle = x \cdot Q^* \cdot Q \cdot \bar{y}^t$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ .  
donde  $Q \in K^{n \times n}$  es una matriz inversible.
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \times V \rightarrow K, \langle x, y \rangle_T = \langle T(x), T(y) \rangle$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ .  
donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales sobre  $K$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno sobre  $W$  y  $T : V \rightarrow W$  es un monomorfismo.
- Restringir el producto interno del ejercicio 5b a  $\mathbb{R}_n[X]$  y calcular su matriz en la base  $B = \{1, X, \dots, X^n\}$ .
- Encontrar una base de  $\mathbb{R}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio 3c con  $K = \mathbb{R}$ .
  - Encontrar una base de  $\mathbb{C}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio 3f.

8. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ .
- Probar que existe un único producto interno en  $V$  para el cual  $B$  resulta ortonormal.
  - Hallarlo en los casos
    - $V = \mathbb{C}^2$  y  $B = \{(1, i), (-1, i)\}$ .
    - $V = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ .
9. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de  $V$ :
- $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S_1 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$  para el producto interno canónico.
  - $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$  para el producto interno definido por  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$ .
  - $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$  para el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$  definido en el ejercicio 5d con  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ 

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} \cdot x^t \quad \text{y } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$
  - $V = \mathbb{C}^4$ ,  $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$  para el producto interno  $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 + 3x_4\bar{y}_4$ .
10.
  - Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.
  - Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
  - Hallar el punto de  $S_4$  más cercano a  $(0, 1, 1, 0)$ .
11. Se define  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$ .
- Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno.
  - Para  $n = 2$ , calcular  $\langle X \rangle^\perp$ .
12.
  - Se considera  $\mathbb{C}^{n \times n}$  con el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ . Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
  - Se considera  $\mathbb{R}_3[X]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2, X^3\}$ . Hallar el complemento ortogonal del subespacio  $S = \langle 1 \rangle$ .
  - Se considera  $C[-1, 1]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ .  
Sugerencia: observar que basta considerar el subespacio  $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$ .
13. Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sea  $W \subseteq V$  un subespacio de dimensión finita de  $V$ . Probar que si  $x \notin W$ , entonces existe  $y \in V$  tal que  $y \in W^\perp$  y  $\langle x, y \rangle \neq 0$ .
14. Calcular  $f^*$  para cada una de las transformaciones lineales siguientes:
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
  - $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
  - $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- d)  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(p) = p'$ , donde  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$ .  
e)  $P \in GL(n, \mathbb{C})$ ,  $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $f(A) = P^{-1} \cdot A \cdot P$ , donde  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ .  
f)  $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $\mu_f(p) = fp$ , donde  $f \in \mathbb{R}[X]$  y  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ .

15. Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean  $f_1$  y  $f_2$  endomorfismos de  $V$  y sea  $k$  un escalar. Probar:

- a)  $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$   
b)  $(kf_1)^* = \bar{k}f_1^*$   
c)  $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$   
d) Si  $f_1$  es un isomorfismo, entonces  $f_1^*$  es un isomorfismo y  $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$   
e)  $((f_1)^*)^* = f_1$   
f)  $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

16. Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$ .

17. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  sea autoadjunta para  $\langle, \rangle$ .

18. Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $S$  un subespacio de  $V$ . Probar que la proyección ortogonal  $P : V \rightarrow V$  sobre  $S$  es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

19. a) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que  $O \cdot A \cdot O^t$  sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria tal que  $U \cdot A \cdot U^*$  sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Se dice que  $f$  es *normal* si  $f \circ f^* = f^* \circ f$ .

- a) Probar que si  $f$  admite una base ortonormal de autovectores, entonces  $f$  es normal.  
b) Probar que si  $f$  es normal valen las siguientes afirmaciones:  
1)  $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall v \in V$ . En particular,  $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$ .  
2)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f - \lambda id_V$  es normal.  
3) Si  $v$  es un autovector de  $f$  de autovalor  $\lambda$ , entonces  $v$  es un autovector de  $f^*$  de autovalor  $\bar{\lambda}$ .  
4)  $E_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$  es  $f^*$ -invariante.  
c) Probar que si  $f$  es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.  
(Sugerencia: observar que  $(E_\lambda)^\perp$  es  $f$ -invariante y  $f^*$ -invariante).

d) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre  $\mathbb{C}$ . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ .

21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .
- b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$ .
- c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ .
- d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .

22. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $f$  es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

23. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

- a) Probar que  $f$  es una rotación.
- b) Hallar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

24. Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Probar que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una isometría tal que  $f(0) = 0$ ,  $f$  resulta una transformación lineal y además  $f$  es ortogonal.
- b) Deducir que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una isometría si y sólo si existen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  transformación ortogonal y  $v \in \mathbb{R}^2$  tales que  $f(x) = g(x) + v$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ .

25. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno canónico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

El área del paralelogramo  $P(v_1, v_2)$  que definen dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea,  $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|$ .

El volumen del paralelepípedo  $P(v_1, v_2, v_3)$  que definen tres vectores  $v_1, v_2, v_3$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  sería “área de la base por altura”, o sea,  $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|$ .

Si esto se generaliza a  $k$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  sería  $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|$ .

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $|\det(A)|$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .*

- a) Dados  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  se define  $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  como  $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ .  
 Probar:
- Si  $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ , entonces  $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$ .
  - Si  $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp$ , entonces  $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \|v_k\|^2$ .
  - $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$ .
- b) Probar que, si  $v_1, \dots, v_k$  son vectores linealmente independientes,  $(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k))$ .
- c) Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  linealmente independientes y sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ . Probar que  $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$ . Deducir que  $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$ .
- d) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores  $(2, 1)$  y  $(-4, 5)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Calcular el volumen del paralelepípedo definido por  $(1, 1, 3)$ ,  $(1, 2, -1)$  y  $(1, 4, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- e) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo. Si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  son linealmente independientes, probar que  $\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n))$ .