

Práctica 8: Espacios vectoriales con producto interno

1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre V . Probar:

- a) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
- b) $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \langle x, y \rangle$.
- c) $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in V \Rightarrow y = z$.

2. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

3. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

- a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$.
- b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$.
- c) $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K, \Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.
- d) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1$.
- e) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$.
- f) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$.
- g) $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K, \Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3 - x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

4. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R}

$$\Phi(x, y) = a x_1y_1 + b x_1y_2 + b x_2y_1 + b x_2y_2 + (1+b) x_3y_3$$

es un producto interno en \mathbb{R}^3 .

5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- a) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.
- b) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.
- c) $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K, \langle x, y \rangle = x \cdot Q^* \cdot Q \cdot \bar{y}^t$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.
donde $Q \in K^{n \times n}$ es una matriz inversible.
- d) $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \times V \rightarrow K, \langle x, y \rangle_T = \langle T(x), T(y) \rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.
donde V y W son espacios vectoriales sobre K , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \rightarrow W$ es un monomorfismo.

6. Restringir el producto interno del ejercicio 5b a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

- 7. a) Encontrar una base de \mathbb{R}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio 3c con $K = \mathbb{R}$.
- b) Encontrar una base de \mathbb{C}^2 que sea ortonormal para el producto interno definido en el ejercicio 3f.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .
- Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.
 - Hallarlo en los casos
 - $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$.
 - $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
9. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V :
- $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$ para el producto interno canónico.
 - $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$ para el producto interno definido por $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$.
 - $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$ para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ definido en el ejercicio 5d con $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} \cdot x^t \quad \text{y } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$
 - $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ para el producto interno $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 + 3x_4\bar{y}_4$.
10.
 - Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.
 - Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
 - Hallar el punto de S_4 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.
11. Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$.
- Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno.
 - Para $n = 2$, calcular $\langle X \rangle^\perp$.
12.
 - Se considera $\mathbb{C}^{n \times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
 - Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
 - Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.
Sugerencia: observar que basta considerar el subespacio $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$.
13. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V . Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y \rangle \neq 0$.
14. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
 - $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
 - $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- d) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$.
 e) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $f(A) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, donde $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$.
 f) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = fp$, donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

15. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar:

- a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
 b) $(kf_1)^* = \bar{k}f_1^*$
 c) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$
 d) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$
 e) $((f_1)^*)^* = f_1$
 f) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

16. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$.

17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f sea autoadjunta para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

18. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V . Probar que la proyección ortogonal $P : V \rightarrow V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

19. a) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $O \cdot A \cdot O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $U \cdot A \cdot U^*$ sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

- a) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.
 b) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:
 1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall v \in V$. En particular, $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$.
 2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda id_V$ es normal.
 3) Si v es un autovector de f de autovalor λ , entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\bar{\lambda}$.
 4) $E_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$ es f^* -invariante.
 c) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.
 (Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f -invariante y f^* -invariante).

d) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre \mathbb{C} . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre \mathbb{R} .

21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
- c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

- a) Probar que f es una rotación.
- b) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

24. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.
- b) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

25. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos \mathbb{R}^n con el producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en \mathbb{R}^n se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea, $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|$.

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en \mathbb{R}^n sería “área de la base por altura”, o sea, $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|$.

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n , el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería $\|v_1\| \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|$.

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^n es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n .*

- a) Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ como $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.
 Probar:
- Si $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
 - Si $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp$, entonces $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \|v_k\|^2$.
 - $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$.
- b) Probar que, si v_1, \dots, v_k son vectores linealmente independientes, $(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k))$.
- c) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n . Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$. Deducir que $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.
- d) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en \mathbb{R}^2 . Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en \mathbb{R}^3 .
- e) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que $\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n))$.