Práctica 7: Forma de Jordan

---

1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

   b) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

   c) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

2. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ -1&0&-1&0&0&1&0 \\ -1&-1&-1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

3. Sean A_i $(1 \le i \le 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i}(X) = X^3$ $(1 \le i \le 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

4. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

6. *a*) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

   b) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

b) Sea λ un autovalor de f y sea $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda\, Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda\, Id - f)^m)$.
¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?

c) Para cada autovalor λ de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda\, Id - f)^k)$?

d) Si λ es un autovalor de f, se nota f_λ a la restricción de $\lambda\, Id - f$ a V_λ. Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ.

8. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

a) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f.

b) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.

c) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

9. Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{X}_A$, m_A y hallar la forma de Jordan de A.

b) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A.

11. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x,\ x.e^x,\ x^2.e^x,\ e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

12. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si A y B son semejantes.

13. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)^3(X-3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B.

14. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$; $\quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$
    b) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5$; $\quad m_A(X) = (X-7)^2$
    c) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7$; $\quad m_A(X) = (X-2)^3$
    iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4$; $\quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2$

15. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{array}{llll} \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 11, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^3 = 10, & \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^4 = 10, \\ \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^2 = 11, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^3 = 10, & \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I)^4 = 9, \\ \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I) = 13, & \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 12, & \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I)^3 = 11. & \end{array}$$

    Hallar su forma de Jordan.

16. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)^2(X-\lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j),$$
$$\operatorname{rg}(A-\lambda_1 I) = 11,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 10,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I) = 12,\ \operatorname{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y}$$
$$\operatorname{rg}(A-\lambda_4 I) = 13.$$

17. Sean x, $y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i y_j$.

    a) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.
    b) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

19. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $m_A(X) = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

21. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,,\ a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

    Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

22. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& 3\,x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &=& x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) &=& -x_2(t) + 2\,x_3(t) \end{cases}$$

    con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.