

Práctica 6: Autovalores y autovectores - Diagonalización

1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \quad \text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \quad \text{v)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vi)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ la transformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.
3. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.
4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

- i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.
- ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz resulte diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}.$$

7. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i -ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).
- ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea diagonal.
- iii) Hallar la fórmula general para el término F_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
- iv) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

- 9. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.
- 10. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible $\Leftrightarrow 0$ no es autovalor de A .
 - ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, x autovector de $A \Rightarrow x$ autovector de A^{-1} .
 - iii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.
- 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.
- 12. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

- 13. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. ¿Es A única?
- 14.
 - i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalizable con $\text{tr}(A) = -4$. Calcular los autovalores de A , sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1 , 3 y 8 .
 - ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de A .
- 15.
 - i) Sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un proyector con $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?
 - ii) Sea K un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?
- 16. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
- 17. Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

18. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad.

i) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

ii) Probar que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

19. Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times m}$.

i) Probar que las matrices de $K^{(m+n) \times (m+n)}$ $\begin{pmatrix} A \cdot B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B \cdot A \end{pmatrix}$ son semejantes.

ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A \cdot B} = \mathcal{X}_{B \cdot A}$.

20. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X - 1)^2$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

22. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

v) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ix) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ xi) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

xii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xiii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ xiv) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xv) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

23. Sea $A \in K^{n \times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

24. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i) $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2P$

ii) $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(A) = A^t$

25. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.
26. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:
- Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .
 - Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2 .
 - Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 - Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
27. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f .
28. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Comparar con el ejercicio 11.
29.
 - Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f -invariantes.
 - Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ . Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ -invariantes.
 - Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es
$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ -invariantes.
30. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.
- Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ que es f -invariante.
 - Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.
31.
 - Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V f -invariante, probar que $f : S \rightarrow S$ es diagonalizable.
 - Sean $A, B \in K^{n \times n}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$ y sea $E_\lambda = \{x \in K^n / Ax = \lambda x\}$. Probar que E_λ es B -invariante.
 - Sean $A, B \in K^{n \times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C \cdot A \cdot C^{-1}$ y $C \cdot B \cdot C^{-1}$ son diagonales. (Es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.)
32.
 - Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.
 - Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

33. Sea $A \in K^{n \times n}$.

- i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A .
- ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

34. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.