

Práctica 4: Espacio Dual

1. Dada la base B del K -espacio vectorial V , hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

c) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X\}$.

2. Sea $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1, -1, 2) = 0\}$. Hallar una base de S .

3. Sea $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3.$$

Hallar la base B de \mathbb{R}^3 tal que $B' = B^*$.

4. Sean f_1, f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

- a) Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

- b) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

5. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n .

- a) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Demostrar que $\text{Nu}(\varphi_1) = \text{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

- b) Sean φ_i ($1 \leq i \leq r$) formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$ tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Probar que $\varphi \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_r \rangle$.

- c) Sean φ_i ($1 \leq i \leq n$) formas lineales en V^* . Probar que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) = 0$$

6. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

- a) Calcular las coordenadas de φ en E^* .

- b) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

- c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B .
(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

8. Sean B y B_1 las bases de \mathbb{R}^3 definidas por:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\},$$

$$B_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}.$$

Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1, -3, 2)$ respecto de B^* , calcular sus coordenadas respecto de B_1^* .

9. Sean V y W K -espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \rightarrow V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f \quad \forall \varphi \in W^*.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f .

- Probar que f^t es una transformación lineal.
- Probar que $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$ y que $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$.
- Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ y sea $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$.
Si $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ y $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^*B^*}$.
- Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^*B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$

10. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

- $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$.
- $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$.
- $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0; \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
- $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases} \right\}$.

11. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A \cdot B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

12. Para los siguientes subespacios S y T de V , determinar una base de $(S + T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

- $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$, $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$.
- $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 = 0; \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \quad 3x_2 - 2x_3 = 0\}$,
 $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 = 0\}$.

13. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

14. Sea V un \mathbb{Z}_p -espacio vectorial de dimensión n . Probar que

$$\#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = 1\} = \#\{S \subseteq V \text{ subespacio} / \dim(S) = n - 1\}.$$

Calcular dicho número.

15. Sea $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ la forma lineal traza y dado $A \in K^{n \times n}$ se define $f_A : K^{n \times n} \rightarrow K$ como $f_A(X) = \text{tr}(AX)$.
- Probar que $f_A \in (K^{n \times n})^* \forall A \in K^{n \times n}$.
 - Probar que $f_A(X) = 0 \forall X \in K^{n \times n} \Rightarrow A = 0$.
 - Se define $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$ como $\gamma(A) = f_A$. Probar que γ es un isomorfismo.
 - Sea $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \gamma(A) = f$.

16. Sea $\varphi \in (K^{n \times n})^*$ tal que $\varphi(A \cdot B) = \varphi(B \cdot A) \forall A, B \in K^{n \times n}$. Probar que $\exists \alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha \text{tr}$. Deducir que si $\varphi(A \cdot B) = \varphi(B \cdot A) \forall A, B \in K^{n \times n}$ y $\varphi(I_n) = n$ entonces $\varphi = \text{tr}$.
17. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i , $0 \leq i \leq n$, se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \rightarrow K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.
- Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$.
 - Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^n \beta_i P_i$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que, $\forall i$, $0 \leq i \leq n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange*.

- Probar que existen números reales a_0, \dots, a_n tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i P(\alpha_i).$$

Hallar a_0 , a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

18. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial. Sean $f, g \in V^*$ tales que $f \cdot g \in V^*$. Probar que $f = 0$ ó $g = 0$.
19. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0 \forall i$, $1 \leq i \leq n$.