Práctica 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales - Matrices

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

a) $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &=& -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &=& 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &=& 2 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &=& 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &=& 0 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &=& 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &=& 6 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 - x_3 &=& 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &=& 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 1 \\ x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}\right.$$

2. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

3. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 &=& \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &=& \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& \alpha_3 \end{array}\right.$$

4. i) Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos k, resolverlos.

(a) $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + kx_2 - x_3 &=& 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &=& 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rcr} kx_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + kx_2 &=& 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 &=& 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 &=& 0 \end{array}\right.$$

ii) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + kx_2 - x_3 &=& 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &=& -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &=& 2 \end{array}\right.$$

5. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 &= 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 &= b \end{cases}$$

6. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

7. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 1 \end{cases}$$

8. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $(1,1,0) + \lambda(1,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Matrices

9. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$. Probar:

   a) Si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ (la columna j-ésima de B), entonces $A \cdot B = (\,A\cdot B_1 \mid \ldots \mid A \cdot B_r)$ (es decir, $A \cdot B_j$ es la columna j-ésima de $A \cdot B$).

   b) Sean A, $A' \in K^{n\times n}$; B, $B' \in K^{n\times m}$; C, $C' \in K^{m\times n}$ y D, $D' \in K^{m\times m}$.
   Sean M, $M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
   Entonces $M \cdot M' = \begin{pmatrix} A\cdot A' + B\cdot C' & A\cdot B' + B\cdot D' \\ C\cdot A' + D\cdot C' & C\cdot B' + D\cdot D' \end{pmatrix}$.

10. *a*) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

   b) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / \, A\cdot B = B \cdot A \;\; \forall\, B \in K^{n\times n}\}$.

   c) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que
   i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ii) $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$

   d) Probar que si A y $B \in K^{n\times n}$, no necesariamente vale $A^2 \cdot B^2 = (A\cdot B)^2$

11. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

b) $A \cdot B = A \cdot C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$

c) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B \cdot A = 0$

d) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

e) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

12. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$; $B \in K^{n\times r}$; $D, D' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

d) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

e) $tr(\alpha D) = \alpha tr(D)$

f) $tr(D \cdot D') = tr(D' \cdot D)$

13. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

a) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A \cdot B$ es triangular superior.

b) Probar que si A y B son diagonales, $A \cdot B$ es diagonal.

c) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

14. Sea $A \in K^{n\times n}$.

a) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.

b) El producto de dos matrices simétricas, es una matriz simétrica?

c) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff tr(A \cdot A^t) = 0$.

15. Sea $A \in K^{2\times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $\Delta = a.d - b.c$. Probar que, si $\Delta \neq 0$, A es inversible y $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

16. Sea $A \in K^{n\times n}$ inversible y B , $C \in K^{n\times m}$. Probar:

a) $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$

b) $A \cdot B = 0 \Rightarrow B = 0$

17. Sean A , $B \in K^{n\times n}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) Si A y B son inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible.

b) A es inversible $\iff A^t$ es inversible.

c) Si $tr(A) = 0 \Rightarrow A$ no es inversible.

d) Si A es nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

18. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar:

a) Si $C \in K^{m\times m}$ es inversible, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$.

b) Si $m = n$ y $A \in K^{n\times n}$ es inversible, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Matrices Elementales

19. *a*) Para cada i, j $(1 \leq i, j \leq n)$, sea $E^{ij} \in K^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman *matrices canónicas* de $K^{n\times n}$.

1) Si $a \in K - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1).E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

2) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

3) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}.$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $K^{n\times n}$.

b) Probar que:

1) $M_i(a) \in GL(n, K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$
2) $P^{ij} \in GL(n, K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
3) $T^{ij} \in GL(n, K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

c) Sea $A \in K^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$, y sea F_i $(1 \leq i \leq n)$ la i-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Probar que:

1) $E^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \dots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

2) $M_i(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a.F_i$.

3) $P^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i\,,\,j$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

4) $T^{ij}(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a.F_j$.

Notar como conclusión que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

20. *a*) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$.

b) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

c) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$.

21. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

22. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$.

a) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff$ A es inversible.

b) Probar que A es inversible $\iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

23. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, B \in K^{n\times n}\ /\ B.A = I_n \iff A$ es inversible. Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n}/\ A.B = I_n \iff A$ es inversible.