

PRÁCTICA 6 - ADICIONALES

---

**Ejercicio 1.** Sea  $A$  un dominio de ideales principales, y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Probar que:

- (a) Si  $M$  es finitamente generado y  $S$  es un submódulo libre de  $M$  tal que  $M/S$  es sin torsión, entonces  $M$  es libre.
- (b) Si  $M$  no es de torsión y  $M/S$  es de tipo finito con torsión para todo submódulo  $S \neq 0$ , entonces  $M \simeq A$ .
- (c) Si  $G$  es un grupo abeliano infinito tal que  $[G : H]$  es finito para todo subgrupo no nulo  $H$ , entonces  $G \simeq \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 2.**

- (a) Sea  $G$  un grupo abeliano finito, y sea  $p$  un primo positivo que divide al orden de  $G$ . Probar que el número de elementos de orden  $p$  en  $G$  es coprimo con  $p$ .
- (b) Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $p^2q^2$  (donde  $p$  y  $q$  son primos distintos). Determinar cuántos elementos de orden  $pq$  y cuántos elementos de orden  $pq^2$  hay en  $G$ .

**Ejercicio 3.** Caracterizar todos los grupos abelianos finitamente generados  $G$  tales que:

- (a) Todo subgrupo propio de  $G$  es cíclico.
- (b) Todo subgrupo propio de  $G$  es de orden primo.
- (c)  $G$  posee exactamente dos subgrupos propios no nulos.
- (d)  $G$  posee exactamente tres subgrupos propios no nulos.
- (e) Todo subgrupo propio no nulo de  $G$  es maximal.
- (f) Para todo par de subgrupos  $H$  y  $K$  de  $G$ , se tiene que  $H \subseteq K$  o  $K \subseteq H$ .
- (g) El orden de todo elemento no nulo de  $G$  es primo.
- (h)  $G/H$  es cíclico para todo subgrupo no nulo  $H$ .
- (i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.