Matemática II
Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 10412031: Extra, extra!

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontrar todos los autovectores y autovalores de A sabiendo que sus autoespacios tienen dimensión 2, y que $(1, 1, 0, 0)$ es autovector. (**Sugerencia:** NO intente calcular el polinomio característico de A.)

2. Calcular la forma y una base de Jordan de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *(a)* Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que la forma de Jordan de A^2 es la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exhibir las posibles formas de Jordan de A.

(b) Sea J_A una de las posibles formas de Jordan de A calculadas en el item anterior, y sea $B = \{v_1, \dots, v_6\}$ una base de Jordan asociada a esa forma. Calcular una base de Jordan de A^2.

4. Hallar todos los valores $a, b \in \mathbb{C}$ tales que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ -1-a+b & b & -1 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable. Para tales valores de a y b, hallar su forma de Jordan J y una matriz $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ inversible tal que $A = PJP^{-1}$.

5. *(a)* Calcular para cada valor de $a \in \mathbb{C}$ la forma de Jordan de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a+2 & a+1 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 & a+1 \\ -3 & 0 & 3+a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcular una base de Jordan en el caso $a = 1$.