Matemática II
Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 3: Bases, cambios de base y matrices

1. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

a) $V = k^n$, $v = (x_1, \dots, x_n)$, B la base canónica.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$, $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$, $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3)$, $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.

e) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $v = 2X^2 - X^3$, $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$.

2. Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$ en los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 3)\}$.

c) $V = \mathbb{R}[X]_2$, $B = \{(3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + 2\}$.

d) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B' = \{1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3\}$.

3. Sea V un k-espacio vectorial y sean B_1, B_2 y B_3 tres bases de V.

a) $C(B_1, B_3) = C(B_2, B_3)C(B_1, B_2)$.

b) La matriz $C(B_1, B_2)$ es inversible.

4. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontrar una base B' tal que $C(B, B') = M$.

b) Encontrar una base B' tal que $C(B', B) = M$.

5. *a*) Mostrar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

c) Encontrar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar la imagen y el núcleo de los morfismos f, g y $g \circ f$. Decidir si se trata de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

7. Determinar si existe—y en ese caso, encontrar explícitamente—una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{im} f = S$ y $\ker f = T$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, 2, 1)\rangle$.

b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1, -2, 1)\rangle$.

8. En cada uno de los siguientes casos, determine una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones dadas:

a) $(1, 1, 0) \in \ker f$, $\dim \operatorname{im} f = 1$.

b) $\ker f \cap \operatorname{im} f = \langle(1, 1, 2)\rangle$.

c) $f \neq 0$, $\ker f \subset \operatorname{im} f$.

d) $f \neq 0$, $f \circ f = 0$.

e) $f \neq \mathsf{id}$, $f \circ f = \mathsf{id}$.
f) $\ker f \neq 0$, $\operatorname{im} f \neq 0$, $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

9. Encontrar proyectores $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\operatorname{im} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
b) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
c) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_3 = 0\}$, $\operatorname{im} f = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

10. Sea V un k-espacio vectorial.

a) Sea $f : V \to V$ un proyector. Mostrar que $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. Probar además que $g = \mathsf{id} - f$ es también un proyector de V y determinar su núcleo e imagen.
b) Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Entonces existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $S = \ker f$ y $T = \operatorname{im} f$.

11. *a*) Sean U, V y W tres espacios vectoriales, con bases B, B' y B''. Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$|g \circ f|_{B,B''} = |g|_{B',B''}\,|f|_{B,B'}.$$

b) Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Si B_1 y B_2 son bases de V y B_1' y B_2' son bases de W, mostrar que

$$|f|_{B_2,B_2'} = C(B_1', B_2')\,|f|_{B_1,B_1'}\,C(B_2, B_1).$$

12. Sea V un espacio vectorial y sean B y B' dos bases de V. Si $f : V \to V$ es una transformación lineal, mostrar que

$$\operatorname{tr} |f|_{B,B} = \operatorname{tr} |f|_{B',B'}.$$

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} = 0$. Mostrar que existe una base B de V tal que

$$\left(|f|_B\right)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j + 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Mostrar que existe un base B de V tal que

$$\left(|f|_B\right)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ y } i \leq \dim \operatorname{im} f; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$