Matemática II

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 1: Espacios vectoriales, generación, independencia lineal

Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre k. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $0 \cdot v = 0, \quad \forall v \in V$;
(b) $\lambda \cdot 0 = 0, \quad \forall \lambda \in k$;
(c) $(-1) \cdot v = -v, \quad \forall v \in V$;
(d) $-(-v) = v, \quad \forall v \in V$;
(e) $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$;
(f) $-0 = 0$ en V.

2. *(a)* Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{f : X \to k\}$ el conjunto de todas las funciones de X a k. Mostrar que las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

hacen de k^X un espacio vectorial sobre k.

(b) ¿Bajo qué condiciones es k^X de dimensión finita? Cuando estas condiciones se cumplan, encuentre una base.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^X$ sobre $\mathbb{R}$.

(a) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$;
(b) $\mathbb{R}^X$;
(c) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$;
(d) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\}$;
(e) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es derivable$\}$;
(f) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) = 3f'(x_0)\}$ para $x_0 \in X$.

Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

4. Sea X un conjunto no vacío, V un espacio vectorial sobre k y consideremos el conjunto $V^X = \{f : X \to V\}$ de todas las funciones de X en V.

(a) Mostrar que es posible definir sobre V^X, imitando lo hecho en el ejercicio **2**, operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera tal que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k.
(b) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como subespacio de V^X?
(c) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X?

5. Sea $A \in k^{n \times m}$ y sea

$$S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$$

el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A. Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m.

6. Sean S y T subespacios de un k-espacio vectorial V. Pruebe que:

(a) $S \cap T$ es un subespacio de V.

†*(b)* Si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

7. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos S son sub-k-espacios de V

(a) $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,1), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$;

(b) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$;

(c) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$;

(d) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \geq 2\}$, $V = k[X]$;

(e) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq 5\}$, $V = k[X]$;

(f) $S = \{M \in M_4(k) : M^t = M\}$, $V = M_4(k)$;

(g) $S = \{M \in M_4(k) : \operatorname{tr} M = 0\}$, $V = M_4(k)$, donde $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^4 M_{ii}$;

(h) $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $k = \mathbb{R}$.

8. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub-$\mathbb{R}$-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}^+$, y consideremos la operación $+$ definida sobre V por

$$+ : (u,v) \in V \times V \mapsto uv \in V,$$

donde uv es el *producto* usual calculado en $\mathbb{R}^+$, y la acción de $\mathbb{R}$ sobre V dada por

$$\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto v^\lambda \in V.$$

Muestre que $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Conjuntos generadores

10. *(a)* Encontrar al menos tres sistemas de generadores del subespacio

$$S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(b) ¿$(2,1,3,5)$ está en S?

(c) ¿Es $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?

(d) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$?

11. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

(a) k^n sobre k;

(b) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k;

(c) $k[X]$ sobre k;

(d) $\mathbb{C}^n$, con $k = \mathbb{R}$;

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$;

(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con k arbitrario;

(g) $\{f \in k[X]_4 : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$, con $k = \mathbb{Q}$;

(h) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$.

12. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X.

(b) Sea

$$k_0^X = \{f \in k^X : \text{existe } Y \subset X \text{ finito tal que } f|_{X\setminus Y} \text{ es constante}\},$$

el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito.
Encuentre un sistema de generadores para k_0^X.

†*(c)* Si X es finito, y V es un k-espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X.

Dependencia lineal y bases

13. En este ejercicio todos los espacios vectoriales son reales. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso de no serlo, determine qué elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

(a) $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1,0,-1),(1,1,2),(0,1,1)\}$ en $\mathbb{C}^3$.

(c) $\{(1,1,2),(1,4,3),(3,3,3),(e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2),(1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(e) $\{(1,1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3),(1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

(f) $\{(\frac{1}{2}(X-1)(X-2),(X-1)(X-3),(X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.

(g) $\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&i\\1&i\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&i\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

14. Determinar todos los $\lambda \in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

(a) $\{(1,2,\lambda),(1,1,1),(0,1,1-\lambda)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{\lambda X^2 + X, -X^2+\lambda, \lambda^2 X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.

(c) $\{\left(\begin{smallmatrix}1&\lambda\\-1&2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}\lambda&1\\0&2\lambda\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

15. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales

(a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(b) $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = \bar{A}^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(c) $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(d) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+1} = 2a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(e) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(f) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(g) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p'(1) = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

†**16.** Sea $v_i = (a_{i1},\dots,a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ si $1 \le i \le n$, y supongamos que $a_{ij} \le 0$ si $i \ne j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

17. Sea $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i = i$ si $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

18. Sea $\alpha_i \in k$ para $1 \le i \le n$, y sea

$$v_i = (1,\alpha_i,\alpha_i^2,\dots,\alpha_i^{n-1}) \in k^n.$$

Determinar cuando $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente en k^n.

19. Sea V un espacio vectorial sobre k.

(a) el conjunto $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(b) Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\} \subset V$ es linealmente sii el conjunto $\{v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(c) Si $\lambda \in k$, $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$