Matemática II

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 4815162342: Extra, extra!

1. Sea $V = \mathbb{R}[x]_3$, y sean S y T los subespacios:

$$S =< 1 + x + x^2 + x^3, x - x^2, 1 + 2x + x^3, 1 + 2x^2 + x^3 >$$

$$T =< 1 - x + x^2 - x^3, 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3, 2 + x + 3x^2 + 2x^3 >$$

(a) Hallar $H \subset T$ tal que $S + T = S \oplus H$.

(b) Dar un ejemplo de $w \in S + T$, $x, y \in S$, $u, v \in T$, tales que $x \neq y$, $u \neq v$, de manera que

$$w = x + u = y + v.$$

2. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ los subespacios

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ a + kc + d = b - d = 0 \right\} \\ T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ a + b + k(k-1)d = a + d = 0 \right\}. \end{aligned}$$

(a) Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de manera que $\dim S + T = 3$.

(b) Para cada uno de los valores de k hallados en el item anterior exhibir una base de $S + T$.

3. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios

$$\begin{aligned} S &= < (1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 1) > \\ T &= \{x \in \mathbb{R}^4 / \ a.x_1 + b.x_2 + x_4 = x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Calcular todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que se verifiquen simultáneamente:

(a) $\dim(S + T) = 3$

(b) $(1, 1, 1, -1) \in S + T$.

4. Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}_4[x]$ los subespacios definidos por

$$S_1 = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : \ -2 \text{ es raíz doble de } p\}, \ \ S_2 = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : \ p \text{es múltiplo de } x^2 - x - 6\}.$$

(a) Hallar una base de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

(b) Hallar un subespacio S_3 tal que $S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_3$.

(c) Hallar un subespacio S_4 tal que $S_1 \oplus S_4 = \mathbb{R}_4[x]$.