
MATEMÁTICA II

Primer Cuatrimestre — 2010

Práctica 7: Espacios con producto interno

1. Sea V un espacio vectorial sobre $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .
 - a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre V que hace de \mathcal{B} una base ortonormal.
 - b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:
 - i) $V = \mathbb{R}^2, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, -2)\}$;
 - ii) $V = \mathbb{R}^3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;
 - iii) $V = \mathbb{C}^3, k = \mathbb{C}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;
 - iv) $V = \mathbb{C}^4, k = \mathbb{C}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 0, i), (0, 1, 0, i), (i, i, i, 0), (0, 2, 0, 0)\}$;
 - v) $V = \mathbb{R}[X]_3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^3$;
 - vi) $V = \mathbb{R}[X]_3, k = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{(x-1)^i\}_{i=0}^3$.

2. a) Determinar para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la forma bilineal

$$\langle x, y \rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

resulta un producto interno en \mathbb{R}^3 .

- b) Determinar para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenemos un producto escalar en \mathbb{R}^3 poniendo

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1.$$

3. a) Determinar condiciones sobre una matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ de manera que $\langle x, y \rangle = x^t B y$ resulte un producto interno sobre \mathbb{R}^n .
 - b) Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle -, - \rangle_V$, y sea $T : W \rightarrow V$ una transformación lineal. Definamos

$$\langle x, y \rangle_W = \langle Tx, Ty \rangle_V, \quad \forall x, y \in W.$$

Determinar condiciones necesarias y suficientes para que $\langle -, - \rangle_W$ resulte un producto interno.

4. Hallar los complementos ortogonales de los siguientes subespacios, describiendo bases ortonormales de los mismos:

- a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$, con respecto al producto interno usual;
- b) $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 2, 1) \rangle$, con respecto al producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

- c) $V = \mathbb{R}[X]_4, S = \langle x^2, x^4 + x^2 + 1 \rangle$, con respecto al producto interno dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq \, dx;$$

- d) $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ con $f_1(x) = x, f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = x^2, S = \langle f_1 + f_2 \rangle$, y

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \frac{1}{2}f(1)g(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right);$$

5. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$, y $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$. Mostrar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre V , y determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

6. a) Sea $w : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y positiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{R}[X]_n$, y definamos

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx.$$

Mostrar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre V .

- b) Realizar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ cuando $n = 3$ y $w(x) \equiv 1$.

7. Sea p la proyección ortogonal de $V = \mathbb{R}^3$ sobre su subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_1 - x_2 = 0\}$ con respecto al producto interno usual.

- a) Encontrar todas las rectas $L \subset V$ tales que $p(L) = \{(1, 2, 1)\}$.

- b) Encontrar una recta $L_1 \subset V$ tal que $p(L_1) = L_2$, si $L_2 = \{x \in V : 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

8. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea p un proyector en V . Entonces

$$\text{im } p \perp \ker p \iff \|p(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in V.$$

9. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $\phi \in V^*$ tal que $\phi(x) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3$. Encontrar $v \in V$ tal que $\phi = \langle -, v \rangle$.

10. Determinar f^* si

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_3);$

b) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3);$

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, entonces

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d) $f : \mathbb{R}[X]_3 \rightarrow \mathbb{R}[X]_2$ tal que $f(p) = p'$, con respecto a los productos internos dados por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx;$

e) $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ tal que $f(A) = PAP^{-1}$, para una matriz invertible fija $P \in GL_n(\mathbb{C})$ y el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$ en $M_n(\mathbb{C})$.

11. a) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que en la base canónica es

$$[f] = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar un producto interno en \mathbb{R}^3 para el que f resulte autoadjunta.

- b) ¿Es cierto que para todo endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ de un espacio vectorial real de dimensión finita existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ para el cual $f^* = f$?

12. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y $S \subset V$ un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de V en S es un endomorfismo autoadjunto de V . Determine sus autovalores. ¿Hay otros proyectores de V con imagen S que sean autoadjuntos?

13. a) Encontrar $P \in O_n(\mathbb{R})$ tal que PAP^t sea diagonal, si

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Encontrar $U \in U_n(\mathbb{C})$ tal que PAP^* sea diagonal, si

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^*$. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, sea $t_M : A \in V \rightarrow MA \in V$. Mostrar que t_M es un endomorfismo unitario sii M es unitaria.

15. a) Si V es un espacio vectorial real con un producto interno, probar que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

b) Si V es un espacio vectorial complejo con un producto interno, probar que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{i}{4} \|x + iy\|^2 + \frac{i}{4} \|x - iy\|^2,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

c) Mostrar que la suma de dos productos internos es un producto interno.

16. Probar que toda matriz real cuadrada simétrica A posee una raíz cúbica simétrica.