Matemática II
Primer Cuatrimestre — 2010
Práctica 6: Forma normal de Jordan

1. Describir todas las formas de Jordan posibles de un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial de dimensión a lo sumo 6.

2. Calcular las potencias y la exponencial de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. *a*) ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_4(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^4?

b) Cuántas clases de semejanza hay de matrices de $M_7(\mathbb{C})$ que tienen polinomio característico igual a x^7 y polinomio minimal igual a x^3?

4. ¿Para qué valores de n es cierto el siguiente enunciado?

Dos endomorfismos nilpotentes de $\mathbb{C}^n$ con el mismo polinomio minimal y con el mismo rango son semejantes.

5. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

6. Decidir si existen endomorfismos tales que

a) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

b) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = X^5$, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

¿Cuántas clases de semejanza hay?

7. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. *a*) Sea $N \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente, y sea $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Mostrar que A es una raiz cuadrada de $1 + A$.

b) Desarrollando la función $(1+x)^{1/2}$ en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma $1 + N$ con N nilpotente admite raíces cuadradas. ¿Cuántas?

†*c*) Muestre que un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ nilpotente de índice de nilpotencia máximo no posee raíces cuadradas.

9. Sea $J = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ un bloque de Jordan.

a) Calcular J^m.

b) Calcular $f(J)$ si $f \in \mathbb{R}[X]$.

c) Calcular e^J, $\sin J$, $\cos J$.

d) Calcular e^A, $\sin A$, $\cos A$ para algunas de las matrices del ejercicio anterior.

10. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ conmutan, pruebe que $e^{A+B} = e^A e^B$.

11. Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ con $\dim V = 6$, de polinomio minimal X^6, y supongamos que $\{v_1, \dots, v_6\}$ es base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.