1

Resolución de Ecuaciones de Primer Orden

1.1 Desintegración Radiactiva

Si las moléculas de cierto tipo tienen tendencia a desintegrarse en moléculas más pequeñas a un ritmo que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural esperar que el número de moléculas que se descomponen en unidad de tiempo sea proporcional al número total presente. Una reacción química de esta clase se llama una *reacción de primer orden*.

Si x denota el número de gramos presentes a tiempo t y $x(0) = x_0$ tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} x' = -kx \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde k es una constante positiva, denominada la *constante de desintegración.*

Observación 1.1.1. Esta ecuación es una ecuación en la que las variables son separables. Más generalmente una ecuación de la forma

$$x' = g(t)h(x)$$

se denomina una ecuación de *variables separables*. Para resolverla basta con escribirla de la siguiente forma

$$\frac{x'}{h(x)} = g(t)$$

e integrar

$$\int \frac{x'}{h(x)}\, dt = \int g(t)\, dt + C.$$

donde C es la constante de integración.

Resolvamos (1.1). Comencemos por resolver

$$x' = -kx$$

o equivalentemente

$$\frac{x'}{x} = -k.$$

Integrando

$$\ln|x| = -kt + C.$$

De este modo, para cada $C \in \mathbb{R}$ obtenemos dos soluciones

$$x = e^{-kt+C} \quad \text{y} \quad x = -e^{-kt+C}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Si tomamos $A = e^C$, tenemos

$$x = Ae^{-kt} \quad \text{y} \quad x = -Ae^{-kt+C}.$$

O sea que la familia de soluciones de la ecuación $x' = kx$ es

$$x = Be^{-kt} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

con $B \in \mathbb{R}$.

Por último, teniendo en cuenta que $x(0) = x_0$, resulta que la solución de (1.1) es

$$x(t) = x_0 e^{-kt}. \tag{1.2}$$

Maxima 1.1.2. Para la resolución de este tipo de ecuaciones utilizaremos el programa Maxima que es un programa de cálculo simbólico disponible como software libre y wx-Maxima que es un entorno gráfico para Maxima que simplifica mucho su uso y facilita el manejo a quien está empezando.

Con Maxima se pueden resolver simbólicamente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden mediante la instrucción ode2.

Resolvamos (1.1) utilizando wxMaxima. Para expresar la ecuación $x' = kx$ se hace uso del comando diff

```
(%i1) ec: 'diff(x,t)+k*x=0;
```

(%o1) $$\frac{d}{d\,t}\,x + k\,x = 0$$

siendo obligatorio el uso de la comilla simple (') antes de diff al objeto de evitar el cálculo de la derivada, que por otro lado daría cero al no haberse declarado la variable y como dependiente de x. Para la resolución de esta ecuación tan solo habrá que hacer

```
(%i2) ode2(ec,x,t);
```

(%o2) $$x = \%c\, e^{-k\,t}$$

donde $\%c$ representa la constante. Para resolver el problema de valores iniciales usamos el comando ic1

```
(%i3) ic1(%o2,t=0,x=x0);
```

(%o3) $$x = e^{-k\,t}\,x_0$$

Se conocen pocas reacciones químicas de primer orden. Un ejemplo son las *desintegraciones radioactivas*. Conviene expresar la constante k en términos de su *vida media*, que es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre la mitad de la sustancia. Sustituyendo x por $x_0/2$ en (1.2) llegamos a que

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT},$$

donde T es la vida media, entonces

$$k = \frac{ln(2)}{T}.$$

Maxima 1.1.3. Para hacer este despeje con Maxima usamos el comando solve

```
(%i4) solve([x0/2=e^(-k*T)*x0], [k]);
```

(%o4) $$[k = \frac{log\,(2)}{log\,(e)\;T}]$$

Ejemplo 1.1.4. Uno de los métodos más precisos para determinar la edad de restos arqueológicos es el *método del carbono 14* (C^{14}), basado en que para cualquier organismo vivo una proporción constante de átomos de carbono está formada por el isótopo radiactivo C^{14}. La proporción permanece praácticamente constante durante toda la vida y cuando el organismo muere el C^{14} sigue su proceso de desintegración, con lo cual la proporción disminuye. Un modelo simple para describir el fenómeno es el descripto anteriormente, o sea si denotamos con $N(t)$ a la cantidad de C^{14} existente a tiempo t, N_0 a la cantidad existente a tiempo 0 y con λ a la constante de desintegración del C^{14}, entonces $N' = -\lambda N$ y $N(0) = N_0$. Como consecuencia $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La vida media del C^{14} es 5600 años o sea que $\lambda = \ln(2)/5600$. Ahora bien, $R(t)$, la tasa actual de carbono en la muestra está dada por $R(t) = \lambda N(t)$ y la tasa original de desintegración es $R(0) = \lambda N_0$. Entonces

$$\frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\lambda t}$$

y por lo tanto

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R(0)}{R(t)}\right) = \frac{5600}{\ln(2)}\ln\left(\frac{R(0)}{R(t)}\right).$$

Por esto, si se mide $R(t)$ y se observa que $R(0)$ debe ser igual a la tasa de desintegración de una cantidad de madera viva, entonces puede calcularse t.

1.2 Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Las *ecuaciones lineales* son las ecuaciones en las que la derivada de orden más alto es una función lineal de las derivadas de órdenes inferiores. Así, la ecuación lineal general de primer orden es

$$x' = p(t)x + q(t) \tag{1.3}$$

donde p, q son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) de $\mathbb{R}$.

Cuando $q \equiv 0$ la ecuación (1.3) se denomina *ecuación lineal homogénea de primer orden*. La solución del problema lineal homogéneo se obtiene de la siguiente manera:

$$x' = p(t)x$$

entonces

$$p(t) = \frac{x'}{x} = \frac{d}{dt} ln(|x|)$$

y por lo tanto

$$\ln(|x|) = \int p(s)ds + C$$

donde C es una constante. Luego

$$|x| = e^{\int p(s)ds + C} = Ae^{\int p(s)ds}$$

o sea

$$|xe^{-\int p(s)ds}| = A \tag{1.4}$$

donde A es una constate positiva. De (1.4) se deduce que la función $g(t) = xe^{-\int p(t)dt}$ no cambia de signo y además $g(t)$ es una función constante. O sea, tenemos que

$$xe^{-\int p(s)ds} = K$$

o bien

$$x = Ke^{\int p(s)ds} \tag{1.5}$$

donde K es una constante arbitraria.

La solución (1.5) se denomina la *solución general* de la ecuación lineal homogénea.

En las aplicaciones nos interesa obtener soluciones del problema de valores iniciales, en el caso de una ecuación lineal homogénea el problema de valores iniciales es el siguiente

$$\begin{cases} x' = p(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde $t_0 \in (a, b)$ y x_0 son los datos iniciales. Nuevamente tenemos que

$$p(t) = \frac{x'}{x} = \frac{d}{dt} ln(|x|),$$

ahora integramos ambos lados de la igualdad entre t_0 y t

$$\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds = ln(|x|)\Big|_{t_0}^{t} = \ln(|x(t)|) - \ln(|x(t_0)|) = \ln\left(\frac{|x(t)|}{|x_0|}\right),$$

o sea que

$$|x(t)| = |x_0| e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

De manera similar a lo hecho anteriormente, podemos probar que x es una función que no cambia de signo, por lo tanto $\text{sgn}(x(t)) = \text{sgn}(x_0)$ para todo $t \in (a, b)$. Luego

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

es la solución de (1.6).

Definimos

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&x(t) = x_0 T(t, t_0), \\
&T(t_0, t_0) = 1, \\
&T(t, t_0) = T(t_0, t)^{-1}, \\
&T(t, t_0) T(t_0, s) = T(t, s).
\end{aligned}$$

Ahora nos interesa resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Para esto vamos a necesitar usar un factor integrante $\mu(t)$. Para determinarlo multiplicamos la ecuación por $\mu(t)$

$$\mu(t)(x' - p(t)x) = \mu(t) q(t)$$

y buscamos μ de modo que

$$\mu(t)(x' - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu' x + \mu x'.$$

Por lo tanto

$$-p(t) = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{d}{dt} \ln(|\mu|),$$

o sea

$$\ln(|\mu|) = -\int p(s)\, ds.$$

Obteniendo así un factor integrante $\mu(t)$, tomando una primitiva partícula de p:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\, ds} = T(t_0, t).$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}(T(t_0,t)x(t)) = T(t_0,t)q(t).$$

Integrando ambos lado de la igualdad entre t_0 y t, resulta que

$$T(t_0,t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t_0,s)q(s)\,ds,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
x(t) &= T(t_0,t)^{-1}\left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t_0,s)q(s)\,ds\right)\\
&= T(t,t_0)\left(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t_0,s)q(s)\,ds\right)\\
&= T(t,t_0)x(t_0) + T(t,t_0)\int_{t_0}^{t} T(t_0,s)q(s)\,ds\\
&= T(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t,t_0)T(t_0,s)q(s)\,ds\\
&= T(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t,t_0)T(t_0,s)q(s)\,ds
\end{aligned}$$

entonces

$$x(t) = T(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t,s)q(s)\,ds. \tag{1.8}$$

es la solución del (1.7). Esta fórmula se denomina la *fórmula de variación de las constantes*.

Ejemplo 1.2.1. Un recipiente, conteniendo V litros de agua pura, comienza a recibir una solución de agua salada (c kg de sal por litro de solución) a una razón constante de a litros/segundo. Un mecanismo de agitación en el recipiente mantiene homogénea la solución que va siendo formada. Simultáneamente al proceso de inyección de agua salada, comienza a retirarse del recipiente la solución formada, a razón de a litros/segundo. Determinar la cantidad de sal en el recipiente a instante t.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal en kg presente en el recipiente en el tiempo t. Por lo tanto la concentración de sal en la solución es x/V kg/l. Entonces

$$\begin{cases} x' = ac - a\dfrac{x}{V},\\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Resolvamos este problema de valores iniciales usando (1.8).

$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{a}{V}, \\ q(t) &= ac\left(1 - e^{-\frac{at}{V}}\right), \\ T(t,s) &= e^{-\int_s^t \frac{a}{V}\,ds} = e^{-\frac{a}{V}(t-s)}, \\ \int_0^t T(t,s)q(s)\,ds &= ac\int_0^t e^{-\frac{a}{V}(t-s)}\,ds \\ &= cV\left(1 - e^{-\frac{at}{V}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) = cV\left(1 - e^{-\frac{at}{V}}\right). \tag{1.10}$$

Observar que $x(t)/V \nearrow c$ cuando $t \to \infty$.

Maxima 1.2.2. Para resolver (1.9) procedemos de la siguiente manera

```
(%i4) ode2('diff(x,t)-a*c+a*x/V, x, t);
```

(%o4) $$x = e^{-\frac{a\,t}{V}}\left(c\,V\,e^{\frac{a\,t}{V}} + \%c\right)$$

y luego

```
(%i5) sol: ic1(%,t=0,x=0);
```

(%o5) $$x = e^{-\frac{a\,t}{V}}\left(c\,V\,e^{\frac{a\,t}{V}} - c\,V\right)$$

Ahora compliquemos ligeramente nuestro problema. Supongamos que la solución salina saliente del primer recipiente cae en un segundo recipiente, conteniendo V litros de agua pura. Supongamos que el segundo recipiente también tiene un mecanismo de agitación para mantener homogénea la solución formada, y que también deja salir una cantidad de a litros/segundo. La cantidad de sal en el segundo recipiente varía de acuerdo a la ecuación

$$y' = -a\frac{y}{V} + a\frac{x}{V}$$

y usando (1.10), obtenemos la siguiente ecuación lineal

$$y = -\frac{a}{V}y + ac\left(1 - e^{-\frac{at}{V}}\right),$$

con $y(0) = V$.

Nuevamente utilizaremos (1.8) para resolver este problema. En este caso

$$
\begin{aligned}
p(t) &= -\frac{a}{V}, \\
q(t) &= ac\left(1 - e^{-\frac{at}{V}}\right), \\
T(t,s) &= e^{-\frac{a}{V}(t-s)}, \\
\int_0^t T(t,s)q(s)\,ds &= ac\int_0^t \left(e^{-\frac{a}{V}(t-s)} - e^{-\frac{at}{V}}\right)\,ds \\
&= cV - cVe^{-\frac{at}{V}} - catVe^{-\frac{at}{V}} \\
&= cV - c\,(V + at)\,e^{-\frac{at}{V}}.
\end{aligned}
$$

La solución es

$$
\begin{aligned}
y(t) &= T(t,0)x(0) + \int_0^t T(t,s)q(s)\,ds \\
&= cV - c\,(V + at)\,e^{-\frac{at}{V}}.
\end{aligned}
$$

Observar que $y(t)/V \nearrow c$ cuando $t \to \infty$.