En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a., donde X tiene función de densidad
$$f_X(x) = c(1-x)\, I_{[0,1]}\,(x)\,.$$
   (a) Determinar c.
   (b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol: si $x < \frac{1}{3}$, el precio es \$ 1, si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, el precio es \$ 2 y si $x > \frac{2}{3}$ entonces es de \$ 3. Hallar la distribución del precio de venta del producto.

2. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:
$$f_D(x) = k\, x\, I_{(0,10)}\,(x)$$
   (a) Hallar el valor de la constante k.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?
   (c) Ídem 2.b) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.
   (d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.
   (e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea ≥ 0.99?

3. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 con distribución uniforme. El llega a la parada a las 10 de la mañana,
   (a) ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?
   (b) Si el colectivo no llegó a las 10:15, encontrar la probabilidad de que tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

4. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:
$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$
   (a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.
   (b) Sea X v.a. continua. Probar que son equivalentes:
      i. X tiene distribución simétrica respecto de θ.
      ii. $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$
      iii. $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$
      iv. $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$
      v. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

5. (a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$, es decir, normal estándar. Calcular usando la tabla:
      i. $P(X \leq 1.2)$

ii. $P(-0.5 \leq X \leq 1.2)$

(b) Sea Y una v.a. con distribución $\mathcal{N}(2.5, 0.16)$. Calcular usando la tabla:

i. $P(1.8 \leq Y \leq 3.5)$.

ii. $P(Y > 3.2)$.

iii. $P(Y^2 \leq 4)$.

6. En una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.

7. Sea $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$. Probar que:

$$F_Z(z) = P(X_z \geq n)$$

donde $X_z \sim \mathcal{P}(z\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, sea $Y = [X] + 1$ (donde $[X]$ significa parte entera de X). Probar que $Y \sim \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

9. Sea X una v.a. continua con función de distribución F. Sea $Y = F(X)$. Mostrar que $Y \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

10. Sea Z una v.a. con distribución normal estándar. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_1$.

11. Se dice que una v.a. X tiene distribución log-normal si su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\, x\, \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] I_{(0,+\infty)}(x).$$

Comprobar que si X es log-normal de parámetros μ y σ^2 entonces $Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

12. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros α y β ($\mathrm{W}(\alpha, \beta)$) si su densidad es:

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] I_{(0,+\infty)}(x) \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Ver que si X es una v.a. con esta densidad entonces $Y = (X/\alpha)^{\beta} \sim \varepsilon(1)$.

(a) Sea para $a > 0$ y $b > 0$, $G(a, b) = P(X > a + b \mid X \geq a)$. Mostrar entonces que si X es $\mathrm{W}(\alpha, \beta)$,

1. con $\beta > 1$, entonces $G(a, b)$ es una función decreciente de a. ("Propiedad de desgaste").
2. con $\beta < 1$, entonces $G(a, b)$ es una función creciente de a.

13. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias:

(a) $cX + d$

(b) $\dfrac{X}{X+1}$

(c) $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X), \qquad \lambda > 0.$

14. Sea U una variable con distribución $\mathcal{U}(0,1)$. Encontrar una función g tal que $g(U)$ tenga distribución

(a) $\mathcal{E}(1)$.

(b) Doble exponencial. Es decir con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(c) Bi(5, 1/3).

(d) Una distribución discreta con rango numerable $R_X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y respectivas probabilidades $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15. Don Zoilo tiene dos vacas (Aurora y Belinda). La cantidad de leche (en litros) que da Aurora en un día es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(0.2)$. Es decir, su función de densidad es

$$f_X(x) = 0.2e^{-0.2x} I_{(0,+\infty)}(x) .$$

Belinda, en cambio, da 5 litros el 20% de las veces y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los días en que Aurora da menos de 6 litros.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que Aurora dé más de 6 litros en exactamente dos días de la próxima semana? (los fines de semana no la ordeñan).

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga más de 8 litros en un día?

(c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca (en kilos) que obtiene con X litros de leche es $W = g(X)$ siendo

$$g(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & \text{si } X \leq 8 \\ \frac{1}{7}(X-1)^2 - 5 & \text{si } 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & \text{si } 15 < X \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de la cantidad de manteca.

16. La proporción de azúcar artificialmente agregada a un jugo de frutas durante el proceso de producción en una cierta fábrica puede pensarse como una variable aleatoria X. La función de densidad de X es

$$f_X(x) = 12(1-x)x^2 I_{(0,1)}(x)$$

El precio de venta (en pesos) de dicho jugo de frutas, Y, depende de la fracción de azúcar agregada de la siguiente forma

$$Y = -27X^2 + 18X + 17.$$

(a) Hallar la función de distribución F_Y de la variable Y.

(b) Se elige al azar un jugo producido por dicha fábrica. ¿Cuál es la probabilidad de que valga más de \$17?