En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. Sea X una v.a. Para cada uno de los siguientes casos calcular las probabilidades $P(X \in A)$, $P(X \in B)$, $P(X \in B \mid X \in A)$ y $P(X \in B \mid X \in A^c)$, donde la función de distribución de X es:

   (a)
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$
   En este caso sean $A = [-3, 1]$, $B = (-2, 2)$.

   (b)
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si} \quad 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$
   En este caso sean $A = [1, 5]$, $B = (1/2, 3)$.

   (c)
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
   En este caso, sea A el conjunto de los números reales que difieren de algún natural en no más de $1/4$, $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{2k}$ con $B_k = [k, k+1]$, $k \geq 0$.

   (d) Identificar cuáles de las distribuciones corresponden a variables aleatorias discretas.

2. Sobre el escritorio de la secretaria de Felipe hay 4 cartas y los 4 sobres correspondientes a las cartas. La secretaria introduce las cartas en los sobres al azar; sea:
   $$X = \text{número de cartas correctamente introducidas.}$$
   Hallar p_X y F_X.

3. Sea el espacio de probabilidades $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, P)$ donde:
   $$P(A) = \int_{A \cap [0,3]} \frac{2}{9} x \, dx$$

   (a) Calcular

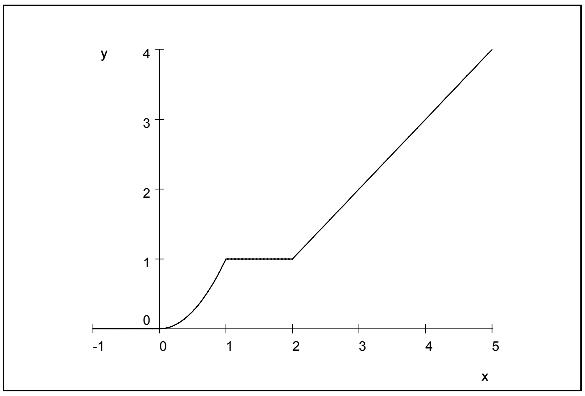
      i. $P([a, b])$ $\qquad a < b \leq 0$

ii. $P([0,t])$ $\qquad t > 0$

iii. $P([0,t))$ $\qquad t > 0$.

(b) Sea $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria definida por:

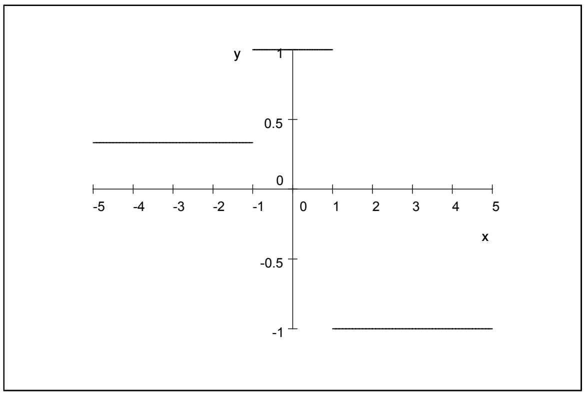
$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ t^2 & \text{si} & 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si} & 1 \le t < 2 \\ t-1 & \text{si} & t \ge 2 \end{cases}$$



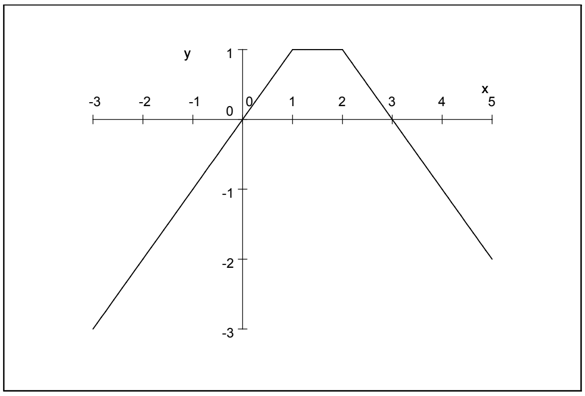
Hallar F_X.

(c) Consideremos ahora las variables:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} & t \le -1 \\ 1 & \text{si} & -1 < t \le 1 \\ -1 & \text{si} & t > 1 \end{cases}$$



$$Z(t) = \begin{cases} t & \text{si} & t < 1 \\ 1 & \text{si} & 1 \le t \le 2 \\ 3-t & \text{si} & t > 2 \end{cases}$$



Calcular F_Y, F_Z y $P(Y < Z)$.

4. En una fábrica la proporción de piezas defectuosas que se fabrican es 0.02. Se toma una muestra con reposición de tamaño n. Hallar:

   (a) la probabilidad de 0 defectuosas en la muestra elegida.

   (b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas en la muestra elegida.

   (c) la probabilidad de al menos 2 defectuosas en la muestra elegida.

   (d) Encontrar el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando $n = 4$ y $n = 100$.

5. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

   (a) Describir un espacio muestral asociado a este experimento.

   (b) Encontrar las funciones de probabilidad puntual y de distribución asociadas a X.

   (c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.

   (d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de tiradas hasta el tercer as. Obtener la distribución de Y (distribución binomial negativa).

6. (a) Sea $X \sim Bi\,(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{G}\,(p)$. Demostrar que $P\,(X = 0) = P\,(Y > n)$.

   (b) Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \dfrac{8}{9}$.

7. Se sabe que el 10% de los pacientes que presentan ciertos síntomas tienen una determinada enfermedad. El diagnóstico final de la misma depende de un análisis de sangre. Sin embargo, como los análisis individuales son caros, el hematólogo espera hasta que N pacientes que presentan los síntomas lo visiten. Entonces mezcla la sangre de los N pacientes y le hace el análisis. Si ninguna de las N personas está enferma, el análisis sobre la muestra de la mezcla de sangre es negativo. Sin embargo, si uno de los pacientes está enfermo, entonces el análisis dará positivo, y el hematólogo deberá hacer análisis individuales para determinar cuál de los pacientes tiene la enfermedad.

   (a) Encontrar la probabilidad de que el análisis sobre la sangre mezclada dé negativo.

   (b) Si $X =$ número de análisis que debe hacer el hematólogo sobre los N pacientes, determinar la función de probabilidad puntual de X.

8. En una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad p de éxito, encontrar la probabilidad de que ocurran por lo menos A éxitos antes de B fracasos.
   Sugerencia: la cuestión se decide después de no más de $A + B - 1$ ensayos.

9. Una rueda de ruleta está dividida en 38 secciones, de las cuales 18 son rojas, otras 18 negras y las 2 restantes son verdes. Sea X el número necesario de juegos para obtener una sección verde en jugadas independientes.

   (a) Encontrar la probabilidad de que al menos 4 jugadas sean necesarias.
   (b) Encontrar la probabilidad de que sean necesarias un número impar de jugadas.

10. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, $(0 < p < 1)$.

    (a) Verificar que si s y t son números naturales, entonces
    $$P(X \geq s + t \mid X > t) = P(X \geq s).$$
    (Propiedad de "falta de memoria o desgaste").
    (b) Probar que la única distribución discreta concentrada en $\mathbb{N}_0$ con esta propiedad es la geométrica, de parámetro $p = P(X = 1)$.

11. En una fábrica de generadores se producen diariamente 20 unidades, de las cuales el 20% es defectuosa. Si se vende una partida de 15 generadores, encontrar la probabilidad de que

    (a) no haya defectuosos en la partida.
    (b) haya a lo sumo un defectuoso en la partida.

12. Un comprador de componentes eléctricas los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar inspecciona 3 componentes elegidas al azar del lote, y lo aceptará si ninguna de las componentes revisadas está fallada. Si el 30% de los lotes tiene 4 componentes defectuosas y el 70% sólo una, encontrar la proporción de lotes que rechazará el comprador.

13. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. Encontrar la probabilidad de que compre si en realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables.

14. En un concurso de pesca cada pescador paga \$100 por participar. Las cantidades de peces que cada uno de los pescadores puede obtener durante el desarrollo del concurso es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de \$50 por cada pieza. Calcular la función de probabilidad de la ganancia neta.

15. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones por semana. El minorista completa su stock los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana, y no vuelve a completar su stock sino hasta la semana siguiente. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?
    (c) ¿Cuál es el mínimo número de cajones con los que deberá iniciar la semana para que la probabilidad de cumplir con todos los pedidos sea mayor o igual a 0.99?
    (d) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?
    (e) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos por semana?

16. Se tienen 3 fuentes radiactivas F_1, F_2 y F_3. El número de partículas que emite cada fuente por hora es una variable con distribución $\mathcal{P}(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y observa que ésta emite 4 partículas en una hora. Encontrar la probabilidad de que haya elegido la fuente F_2.