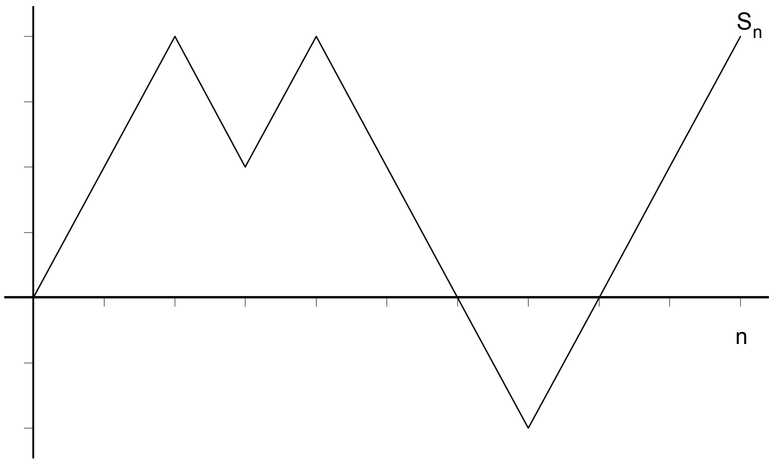
Paseos al azar

1. Consideremos una partícula ubicada, a tiempo cero, en el origen, y supongamos que a cada instante de tiempo la partícula puede subir o bajar una unidad (en el eje y) de acuerdo al resultado de un mecanismo aleatorio, como por ejemplo el resultado de tirar un dado: si sale 1 y 2 la partícula sube, y de lo contrario baja. Sea $\Omega = \{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{-1, 1\}\}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ el espacio de los paseos (o trayectorias) al azar de la partícula. $\omega_i = 1$ significa que el paseo sube una unidad en el instante iésimo, $\omega_i = -1$ significa que la partícula baja una unidad en el instante iésimo.



Notemos que como la $\sigma-$álgebra es partes de Ω entonces toda función $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ resultará variable aleatoria. Sea $p \in (0, 1)$, definimos una probabilidad en Ω por

$$P(\boldsymbol{\omega}) = p^{\#\{\text{subidas que hay en el paseo } \boldsymbol{\omega}\}} \cdot (1-p)^{\#\{\text{bajadas que hay en el paseo } \boldsymbol{\omega}\}}. \tag{1}$$

Para $1 \leq i \leq n$, sea $X_i : \Omega \to \{-1, 1\}$ dada por $X_i(\boldsymbol{\omega}) = \omega_i$, la variable que indica si el paseo sube o baja en el instante iésimo.

(a) Demostrar que los eventos $\{X_1 = 1\}, \{X_2 = 1\}, \ldots, \{X_n = 1\}$ son independientes, siendo $\{X_i = 1\} = \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega : X_i(\boldsymbol{\omega}) = 1\}$.
Observemos que, en virtud del ejercicio 13d) de la práctica 2, los eventos $\{X_i = k_i\}$ para $1 \leq i \leq n$ y $k_i \in \{-1, 1\}$, resultan independientes.

(b) Probar que P dada por (1) es la única probabilidad definida en Ω para la cual los eventos $\{X_i = k_i\}$ para $1 \leq i \leq n$ y $k_i \in \{-1, 1\}$ son independientes y $P(X_i = 1) = p$ para todo $1 \leq i \leq n$.

(c) Para $1 \leq j \leq n$, sea $S_j : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$S_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{j} \omega_i,$$

la variable que indica la posición de la partícula en el instante jésimo. Hallar R_{S_j} el rango de S_j, es decir $\{y \in \mathbb{R} : P(S_j = y) \neq 0\}$.

(d) Hallar $P(S_j = y)$ para $y \in R_{S_j},\ 1 \leq j \leq n$.

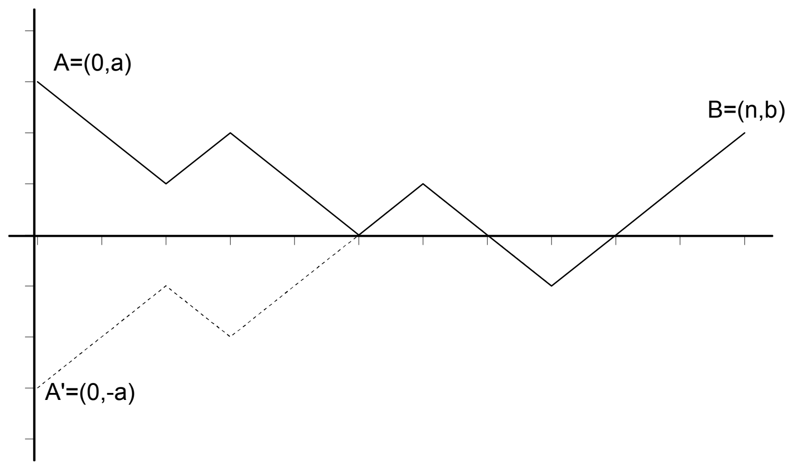
(e) Hallar $P(S_{j+1} = y_{j+1} \mid S_1 = y_1, \ldots, S_j = y_j)$ para $y_1, \ldots y_j, y_{j+1}$ tales que $y_k \in R_{S_k},\ |y_k - y_{k+1}| = 1,\ 1 \leq k \leq j+1$.

(f) Calcular $P(S_{j+1} = y_{j+1} \mid S_j = y_j)$ para y_j, y_{j+1} tales que $|y_j - y_{j+1}| = 1,\ y_j \in R_{S_j},\ y_{j+1} \in R_{S_{j+1}}$.

(g) Concluir que $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov.

(h) Hallar todos los valores de p para los cuales el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ resulta equiprobable. Hallar para este caso el $\#\Omega$.

(i) Principio de reflexión. Supongamos para este ítem que Ω es ahora el espacio de los paseos al azar que comienzan desde el punto $A = (0, a)$, con $a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ (en lugar de empezar desde el origen). Fijemos $B = (n, b)$ algún punto final posible para un paseo que comienza en A. Sea $A' = (0, -a)$ el simétrico de A respecto del eje x. Probar que el número de paseos $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ que van de A a B que tocan o cruzan al eje x es igual al número de paseos de A' a B y calcular este número.



(j) Volvamos a los paseos que comienzan en el origen. Sea $b > 0,\ b \in R_{S_n}$. Probar que la probabilidad de los paseos de longitud n que comienzan en el origen tales que $S_n = b$ y que no cortan ni cruzan el eje x es,

$$P(\{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = b\}) = \frac{b}{n} \cdot P(S_n = b),$$

o, equivalentemente

$$P(\{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = b\} \mid S_n = b) = \frac{b}{n}.$$

Notar que

$$P(\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid S_n = b) = \frac{1}{\binom{n}{\frac{n+b}{2}}}$$

sin tomar en cuenta el valor de p. Es decir, condicional a que sabemos que un camino termina en (n, b), todos los caminos que unen el $(0,0)$ con el (n, b) tienen igual probabilidad.

Sugerencia: Notar que $S_1 > 0$ equivale a $S_1 = 1$, y usar el principio de reflexión.

(k) Problema del escrutinio. Supongamos que en una elección, el candidato M obtiene m votos y el candidato K, k votos, con $m > k$. Probar que la probabilidad de que a través de todo el escrutinio haya siempre más votos para el candidato M que para K es $\dfrac{m-k}{m+k}$.

(l) Cien personas hacen cola en la boletería de un teatro. La entrada cuesta \$5. Sesenta personas no tienen más que billetes de \$5 y las otras cuarenta no tienen más que billetes de \$10. No hay dinero en la caja al abrir la boletería. ¿Cuál es la probabilidad de que la venta de entradas se desarrolle sin pararse, es decir sin que se presente ninguna persona que tenga billetes de \$10 para adquirir la entrada cuando no hay billetes de \$5 en caja?