Propiedades de la esperanza condicional

1) Si X, Y son variables aleatorias independientes , $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.

2) Si $P(Y = c) = 1$, $\mathbb{E}(Y|X) = c$.

3) Si (X, Y) es un vector aleatorio y $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces :

$$\mathbb{E}(h(X,Y)|X = x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) f_{Y|X=x}(y)\, dy & (X,Y) \text{ vector continuo, } f_X(x) > 0 \\ \\ \sum_{y \in R_Y} h(x,y) p_{Y|X=x}(y) & (X,Y) \text{ vector discreto, } x \in R_X \end{cases}$$

4) $\mathbb{E}(h(X)|X) = h(X)$, para toda h medible.

5) $\mathbb{E}(r(X)s(Y)|X) = r(X)\mathbb{E}(s(Y)|X)$, r, s medibles.

6) $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|Z) = \alpha\mathbb{E}(X|Z) + \beta\mathbb{E}(Y|Z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Vamos a probar los items anteriores usando la definición de esperanza condicional dada en clase. Ésta es,

$$\mathbb{E}(Y|X) = g(X) \Leftrightarrow \mathbb{E}((Y - g(X))t(X)) = 0 \quad \forall t(X) \in L^2.$$

1) Notemos que como X e Y son independientes, también lo serán $h(X)$ e Y. Así , tenemos $\mathbb{E}(Yt(X)) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(t(X))$. Con ésto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))t(X)) &= \mathbb{E}(Yt(X)) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(t(X)) \\ &= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(t(X)) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(t(X)) = 0. \end{aligned}$$

2) Como $P(Y = c) = 1$, X e Y son independientes y se reduce al caso anterior.

3) Hacemos el caso discreto (el caso continuo es análogo).

Si $g(x) = \sum_{y \in R_Y} h(x,y) p_{Y|X=x}(y)$, queremos ver que cumple la definición de esperanza condicional.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)t(X)) &= \sum_{x\in R_X} g(x)t(x)p_x(x) \\
&= \sum_{x\in R_x}\Big[\sum_{y\in R_Y} h(x,y)p_{Y|X=x}(y)\Big]t(x)p_X(x) \\
&= \sum_{x\in R_x}\sum_{y\in R_Y} h(x,y)t(x)\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}p_X(x) \\
&= \sum_{(x,y)\in R_{(X,Y)}} h(x,y)t(x)p_{X,Y}(x,y) \\
&= \mathbb{E}(h(X,Y)t(X))
\end{aligned}
$$

para $t(X)\in L^2$.

4) $\mathbb{E}((h(X)-h(X))t(X)) = \mathbb{E}(0.t(X)) = 0, \qquad \text{para } t(X)\in L^2.$

5) $r(X)\mathbb{E}(s(Y)|X)$ resulta función de X y, además, se verifica

$$\mathbb{E}((r(X)s(Y)-r(X)\mathbb{E}(s(Y)|X))t(X)) = \mathbb{E}((s(Y)-\mathbb{E}(s(Y)|X))r.t(X)) = 0.$$

Notar que en la última igualdad estamos usando la definición de $\mathbb{E}(s(Y)|X)$.

6) $\alpha\mathbb{E}(X|Z)+\beta\mathbb{E}(Y|Z)$ resulta función de Z y, además, se verifica

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((\alpha X+\beta Y)t(Z)) &= \alpha\mathbb{E}(Xt(Z)) + \beta\mathbb{E}(Yt(Z)) \\
&= \alpha\mathbb{E}(E(X|Z)t(Z)) + \beta\mathbb{E}(E(Y|Z)t(Z)) \\
&= \mathbb{E}((\alpha\mathbb{E}(X|Z)+\beta\mathbb{E}(Y|Z))t(Z)).
\end{aligned}
$$