OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2009

Práctica 2

Restricciones de Igualdad y de Desigualdad

Ejercicio 1 Encontrar ejemplos donde:

1. x^* es minimizador local de f en Ω, pero $\nabla f(x^*) \neq 0$
2. x^* es minimizador local de f en Ω, $\nabla f(x^*) = 0$, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva.
3. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$ pero x^* no es minimizador local.
4. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, pero x^* no es minimizador local.
5. Ω es abierto, x^* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no sea definida positiva.

De acá en más trabajaremos con el problema general de programación no lineal:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = 0 \\ c(x) \leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2 Probar que si $h(x) = Ax + b$, la regularidad no es necesaria para la validez del teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Ejercicio 3 Verifique que $\mathcal{N}(h'(x)) \subsetneq M(x)$: Considere el hiperboloide definido por $h(x) = x_1 x_2$ en el punto $x^* = (0, 0)$.

Ejercicio 4 Probar que si x^* es minimizador local del problema (con $g \equiv 0$), entonces existen $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, tales que $\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$.

Ejercicio 5 Busque el mínimo de $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ con $x \in \Omega$.
Donde $\Omega = \{Dx_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 10 \,\text{y}\, x_1^2 + x_2^2 \leq 225\}$

Ejercicio 6 Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \min 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 800 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + 4x_3 = 24 \end{cases}$$

1. Usar la estrategia para buscar el mínimo y formular el problema de multiplicadores de Lagrange asociado.
2. Usando el método de Newton, calcular (x^*, λ^*).

3. Verificar que $y^t \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) y > 0, \ \forall y \in \mathcal{N}(h'(x^*)), \, y \neq 0.$

4. Concluir que x^* aproxima a un minimizador local estricto del problema original.

Ejercicio 7 Realizar el mísmo análisis que en el ejercicio anterior para el siguiente problema:

$$\begin{cases} \min 2e^{3x_1} + 3x_2^2 + 5x_3^4 + 4 \\ \|x\| = 4 \\ \sum_{i=1}^3 x_i = 3 \end{cases}$$

Para el paso 2, comenzar en el algoritmo de Newton con los siguientes valores iniciales: a) $(1, 2, 3, 4, 5)$ y b) $(-10, 20, -3, 1, 1)$.

Ejercicio 8 Considere el problema perturbado $MRI(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ h(x) = \varepsilon \end{cases}$$

Sea x^* una solución regular de $MRI(0)$. Denotando $x^* = x(0)$ y usándose las condiciones de optimalidad para $MRI(\varepsilon)$ y el teorema de la función implícita para definir $x(\varepsilon)$, pruebe que

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(x(0)) = -\lambda_i \qquad i = 1, ...m$$

Ejercicio 9 Buscar 3 puntos y un radio tal que los círculos formados maximicen la superficie dentro de un cuadrado de lado l. Plantee el problema (funcional a maximizar y reestricciones), poner en el contexto del problema modelo. Plantear el problema asociado usando las condiciones KKT. Finalmente resolver el problema.

Ejercicio 10 Considere el problema:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

Donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $-\infty < l_i < u_i < +\infty$, $\forall i = 1, ...n$. Muestre que, si x^* es un minimizador local y $f \in C^1$ en un entorno de x^* en $\Omega = \{l \leq x \leq u\}$, entonces se tiene que $g_p(x^*) = 0$, donde

$$\big(g_p(x)\big)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) > 0 \text{ y } x_i = l_i \\ 0 & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) < 0 \text{ y } x_i = u_i \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

El vector $g_p(x)$ se denomina dirección de Cauchy.

Ejercicio 11 Interprete todos los resultados teóricos de esta sección para el caso cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.