OPTIMIZACIÓN - 1ER CUATRIMESTRE 2009

Práctica 1

Algoritmos y complejidad

Ejercicio 1 Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

1. n es $O(n)$
2. $3n^2 + 7n + 4$ es $O(n^2)$
3. n^i es $O(n^j)$ si $i < j$
4. $n \log_2(n)$ es $O(n^2)$

Ejercicio 2 Mostrar que $n!$ no es $O(r^n)$, cualquiera sea el entero positivo r. Concluir que una complejidad de $O(n!)$ es "peor"que exponencial de cualquier base.

Ejercicio 3 Mostrar por último que $n \log n$ es $O(\log(n!))$ y $\log(n!)$ es $O(n \log n)$.

Ejercicio 4 Decir cual es la complejidad de los siguientes algoritmos y explicarlos:

1. Dadas dos variables x, y:
   - poner $a = x$
   - poner $x = y$
   - poner $y = a$
2. Dado un vector v, su dimensión d y un elemento e:
   - poner $i = 1$
   - mientras $i < d$ y $e \neq v(i)$ hacer
   - $\quad\quad i = i + 1$
   - si $e = v(i)$ imprimir i
   - sino imprimir "No se encontró"

3. Dado un número natural n:

```
función F(n)
    si n = 0 devolver 1
    sino devolver n × F(n − 1)
fin función
```

4. Dado un vector v, y su dimensión d:

   - para i desde 1 hasta d hacer
   - poner $min = i$
   - para j desde i hasta d hacer
   - si $v(j) < v(min)$ poner $min = j$
   - poner $a = v(i)$
   - poner $v(i) = v(min)$
   - poner $v(min) = a$

Ejercicio 5 Escribir algoritmos para realizar suma, resta y multiplicación de matrices. Determinar la complejidad y expresarla en función de la dimensión de las matrices.

Ejercicio 6 Escribir un algoritmo que dada una matriz A y un número n calcule A^n. Determinar la complejidad del mismo.

Ejercicio 7 Escribir y determinar la complejidad del algoritmo de Gauss (triangulación) para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El Problema de Optimización

$$\begin{array}{c} \text{mín} f(x) \\ x \in \Omega \end{array}$$

Ejercicio 8 Encontrar ejemplos donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

Ejercicio 9 Encontrar ejemplos de conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y funciones f que tengan varios minimizadores locales y globales.

Ejercicio 10 Mostrar con ejemplos qué pasa cuando se eliminan de las hipótesis del teorema de Bolzano-Weierstrass las condiciones de continuidad o compacidad.

Ejercicio 11 Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 12 Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Minimización sin restricciones

Ejercicio 13 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Ejercicio 14 Resolver el problema de minimizar $\|Ax - b\|$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Considerar todos los casos posibles e interpretar geométricamente.

Ejercicio 15 Considerar los números reales $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Resolver los siguientes problemas:

1. Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$
2. Minimizar Máximo $\{|x - a_i|, i = 1, \ldots, n\}$
3. Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|^2$
4. Maximizar $\Pi_{i=1}^{n} |x - a_i|$

Ejercicio 16 Encontrar los puntos críticos de

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

¿Cuáles de esos son minimizadores o maximizadores, locales o globales?

Ejercicio 17 Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que, para $\overline{x} = (0, 0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) \equiv f(\overline{x} + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero $\overline{x}$ no es un minimizador local de f.

Ejercicio 18 Sea $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$. Hallar los puntos críticos de f. ¿Cuáles de esos son minimizadores o maximizadores, locales o globales?

Ejercicio 19 Encontrar, si es posible, a y b de manera que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$.

Ejercicio 20 Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2(1 - x_1)^3$$

1. Realice un gráfico de la función e identifique un minimizador local.
2. ¿Existe un único minimizador local?
3. ¿Es este un caso donde existe un único minimizador local estricto, el cual no es global?