“¿Alquiler o Hipoteca?: Un Modelo Simple de Tenencia de Vivienda”

Una aplicación del método de programación dinámica a variable dicotómica

Marisol Rodríguez Chatruc

UdeSA

4 CNEPE - 28 y 29 de mayo de 2009

Motivación

- Uno de los aspectos distintivos la crisis actual es que se originó en el mercado hipotecario estadounidense. La inversión en activos inmuebles tiene rasgos particulares porque los activos inmuebles tienen un uso como vivienda.
- Para comprender ciertos fenómenos que están en el núcleo de la llamada *burbuja inmobiliaria* es necesario contar con explicaciones acerca de las variables que influyen en la decisión de pedir una hipoteca.
- En el trabajo, mediante un modelo de búsqueda sencillo al estilo McCall (1970) se plantea la decisión individual entre pedir una hipoteca para comprar una vivienda y alquilar dicha vivienda. Así se puede obtener una expresión que defina (implícitamente) la tasa de interés para la cual el individuo está indiferente entre pedir una hipoteca o alquilar y además se puede conocer su sensibilidad ante cambios en el valor del alquiler y en la distribución de probabilidad que incrementen el riesgo manteniendo la media constante (*mean- preserving spreads*).

Breve repaso de la literatura

- La literatura sobre elección de tenencia del hogar (*housing tenure choice*) es relativamente abundante (especialmente la que se aplica a EE.UU) y se inicia a comienzos de la década del 80
- Los primeros estudios que surgieron son empíricos (Kain y Quigley , 1972 y Li,1977) y estudian los principales determinantes de ser dueño del hogar en algunas regiones de EE.UU.
- A inicios de la década del ochenta surge una literatura teórica que enfatiza en los costos de uso (*user costs*) de ser dueño versus los de alquilar (Henderson y Ioannides, 1983) tomando en cuenta las leyes impositivas y considerando a la decisión de compra de un inmueble tanto como una decisión de consumo como una decisión de portafolio.

- La literatura más reciente puede dividirse en dos grandes enfoques aquélla que usa un marco de equilibrio simple para analizar los factores que afectan la elección de tenencia del hogar (Sinai y Souleles, 2005), y aquélla que destaca cómo comprar o alquilar la propiedad impactan en las decisiones de consumo y de portafolio de los individuos, en un marco de equilibrio parcial (Yao y Zhang, 2005 y Van Hemert, 2006).
- Hay trabajos que desarrollan explícitamente el contrato de hipoteca (Grossman y Laroque, 1990, Campbell y Cocco, 2003). En la mayoría de estos trabajos se resuelve un problema intertemporal de horizonte finito para encontrar el consumo del bien inmueble y la inversión óptima bajo la presencia de un contrato de hipoteca.

El modelo - supuestos

- $t=0,1,2\ldots$ (años)
- Los agentes reciben al inicio de cada periodo una dotación fija normalizada a 1 del único bien de la economía, perfectamente divisible. No existe tecnología de almacenamiento.
- En el instante de tiempo inicial una persona sin hogar tiene que decidir entre dos opciones:
  - Pedir una hipoteca y pagar una tasa de interés $r<1$, fija anual a perpetuidad. Esta decisión es irreversible: una vez que el individuo es dueño no puede pasar a ser inquilino. Supuesto simplificador: no se requiere el pago de un adelanto (*downpayment*) para recibir la hipoteca.
  - Alquilar una propiedad por un periodo de un año (hasta el comienzo de $t=1$) pagando un alquiler fijo $0<R<1$ anualmente.
- La tasa prevaleciente en $t=0$ es r, la cual es la realización de $\tilde{r}$, variable aleatoria con función de probabilidad acumulada F(r) continua y soporte compacto $[0,\bar{r}]$. Con $0<\bar{r}\leq 1$
- El *timing* en el que se desarrollan los acontecimientos es el siguiente: al comienzo del periodo un individuo sin hogar observa la tasa de interés prevaleciente en el mercado y el valor del alquiler y en base a eso decide si quiere ser dueño, pagando la tasa r a perpetuidad o si quiere ser inquilino y pagar R por un año, y a comienzos del año siguiente poder volver a elegir entre ser dueño y alquilar.

- Los agentes maximizan la utilidad esperada a lo largo de toda su vida descontada por el factor $0 < \beta < 1$

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, i_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [c_t + u(i_t)]$$

- $u(c_t, i_t) = c_t + u(i_t)$ es continuamente diferenciable al menos una vez respecto a c_t, estrictamente creciente y cóncava; y donde c_t es igual al ingreso disponible de cada periodo, es decir, a la dotación menos el pago de intereses o de alquiler (según sea el caso); y donde i_t es una variable dicotómica (dummy) que representa el estado del individuo (igual a 1 si es dueño, igual a 0 si es inquilino). Suponemos que $u(1) > u(0) \geq 0$, lo cual refleja la desutilidad que genera mudarse.
- Lo anterior determina que:

$$\begin{aligned} i_t = 1 &\Rightarrow c_t = 1\text{-}r_t \\ i_t = 0 &\Rightarrow c_t = 1\text{-}R \end{aligned}$$

Función de valor

- La ecuación de Bellman asociada a la decisión individual es :

$$V(r,i) = \max\left\{\underbrace{\frac{(1-r)+u(1)}{1-\beta}}_{\text{Si pide hipoteca}};\underbrace{(1-R)+u(0)+\beta\int_0^{\bar{r}} V(r',i')f(r')dr'}_{\text{Si alquila}}\right\} \qquad (1)$$

- Donde $V(r,i)$ puede ser pensada como una función de utilidad indirecta. Es decir, el individuo elige el curso de acción que le brinde una mayor utilidad a lo largo de toda su vida. En el caso de pedir la hipoteca deriva utilidad en todos los periodos del ingreso disponible (1-r) y del hecho de ser dueño. Dado que la decisión de ser dueño es irreversible, esto se descuenta por $1-\beta$ En el caso de decidirse por alquilar, deriva utilidad en el primer periodo del ingreso disponible (1-R) y del hecho de ser inquilino (recordemos que ésta última puede ser nula). En el segundo periodo, vuelve a la situación inicial, es decir, puede elegir entre alquilar y pedir hipoteca, por lo tanto deriva una utilidad (esperada) de ahí en más igual a la esperanza de la función de valor descontada.

Existencia y unicidad de la función de valor

- Para que el problema planteado tenga sentido, es necesario demostrar que la función de valor definida en (1) existe y es única.
- Una de las dificultades que imponen los modelos de búsqueda es que la variable de decisión no es convexa.
- La metodología para demostrar la existencia y unicidad consiste en este caso en:
  1. Mostrar que la ecuación de Bellman esbozada puede pensarse como un mapa T, que mapea un espacio de Banach en sí mismo.
  2. Mostrar que T es una contracción
  3. Usar el Teorema del mapa contractivo que bajo estas condiciones garantiza que el punto fijo existe y es único.

Primer paso

- Sea $B(r,i)$ el espacio de funciones acotadas en *r* e *i* y continuas en *r*, para todo $h(r,i) \in B(r,i)$ se define:

$$Th(r,i) = \max\left\{\frac{(1-r)+u(1)}{1-\beta};(1-R)+u(0)+\beta\int_0^{\bar{r}} h(r',i')f(r')dr'\right\}$$

- $Th(r,i)$ es el máximo entre dos funciones de *r* e *i* que son acotadas y continuas en *r*, por lo tanto:

$$T: B(w) \rightarrow B(w)$$

Segundo paso

- **Condiciones de Blackwell**
  - *Monotonicidad*

Si $h_1 \leq h_2 \quad \forall\ r \in [0, \bar{r}],\ \mathrm{i} \in \{0,1\}$

entonces $Th_1 \leq Th_2 \quad \forall\ r \in [0, \bar{r}],\ \mathrm{i} \in \{0,1\}$

  - *Descuento*

$$T(h+a)(r,i) \leq Th(r,i) + \beta a \quad \forall\ \ \mathrm{h} \in \mathrm{B}(\mathrm{r},\mathrm{i}),\ \ \mathrm{a} \geq 0,\ \ \mathrm{r} \in [0, \bar{\mathrm{r}}],\ \ \mathrm{i} \in \{0,1\}$$

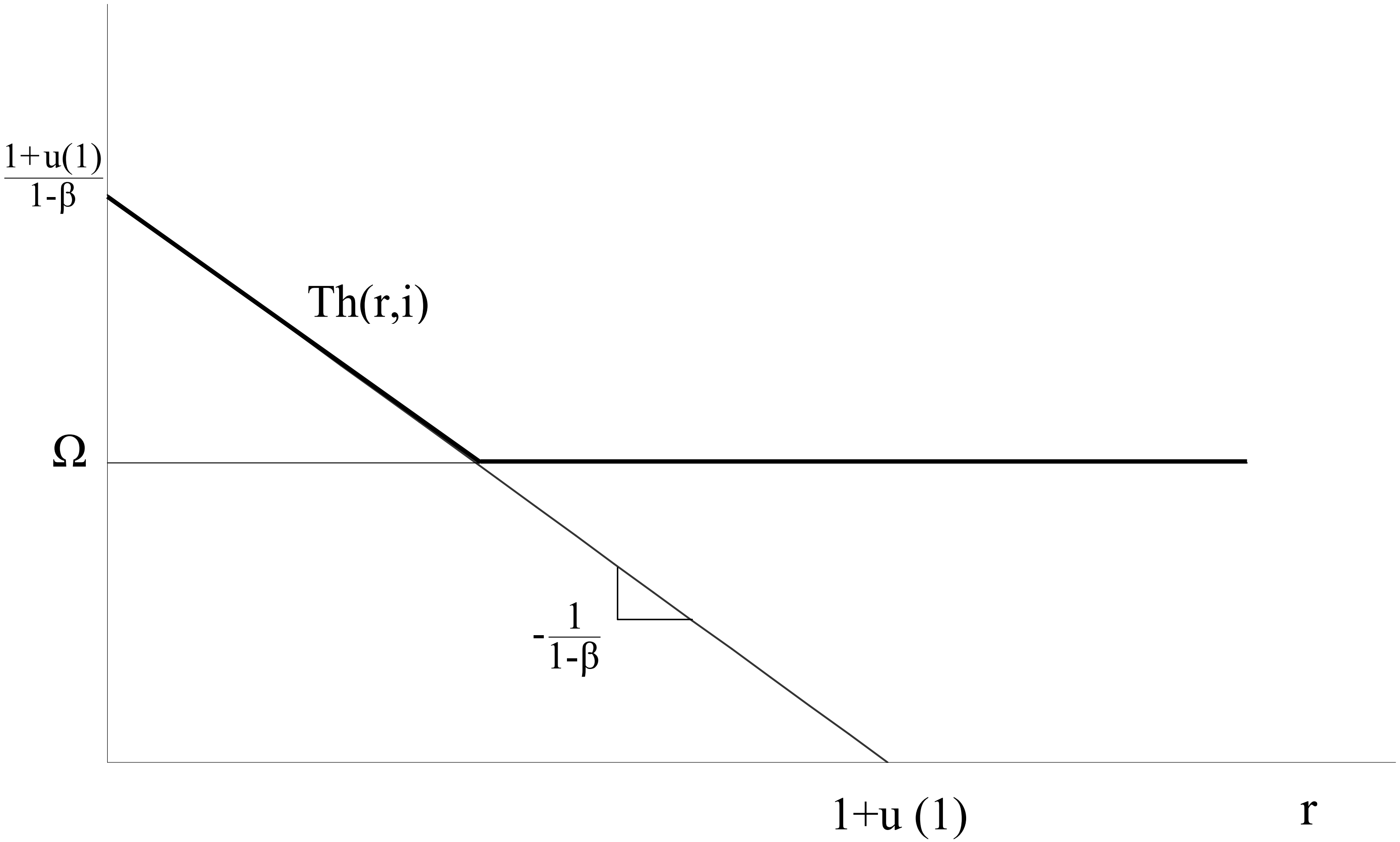
Se puede mostrar que ambas se cumplen.
Entonces T es una contracción

Tercer paso

- T es una contracción que mapea el espacio B(r,i) en sí mismo, el cual es un espacio de Banach . Por ende puede aplicarse el Teorema del mapa contractivo, que garantiza que, bajo estas condiciones, Th(r,i) tiene un único punto fijo, $V(r,i) \in B(r,i)$ tal que TV(r,i)= V(r,i)
- Lo anterior implica que la función de valor es única y que es acotada y continua en r.

Propiedades de la función de valor

- La función de valor es débilmente decreciente en r.



- Existe un único $r^* \in [0, \bar{r}]$ tal que:

$$\frac{\left(1 - r^*\right) + u(1)}{1 \quad \beta} = \left(1 - R\right) + u(0) + \beta \int_0^{\bar{r}} V(r', i') f(r') dr'$$

- La función de valor tiene la siguiente forma:

$$V(r,i) = \begin{cases} \dfrac{(1 - r) + u(1)}{1 - \beta} & \text{si } r \leq r^* \\ \Omega & \text{si } r \geq r^* \end{cases} \qquad (2)$$

- La función de política óptima tiene la siguiente forma:

$$g(r) = \begin{cases} \text{pedir hipoteca} & \text{si} \quad r \leq r^* \\ \text{alquilar} & \text{si} \quad r \geq r^* \end{cases}$$

- Si la realización de la variable aleatoria $\tilde{r}$ al inicio del periodo, resulta menor a un valor umbral r^* que denominamos tasa de interés de reserva, para el individuo es óptimo pedir una hipoteca, en caso contrario, si r resulta menor a r^*, es óptimo alquilar por un periodo y volver a enfrentarse a la misma decisión en el periodo siguiente (seguir buscando). Por último, si r es igual a la tasa de interés de reserva el individuo está indiferente entre ambos cursos de acción.

Propiedades de la tasa de interés de reserva

1. ***Respuesta de la tasa de interés de reserva ante cambios en el valor del alquiler***

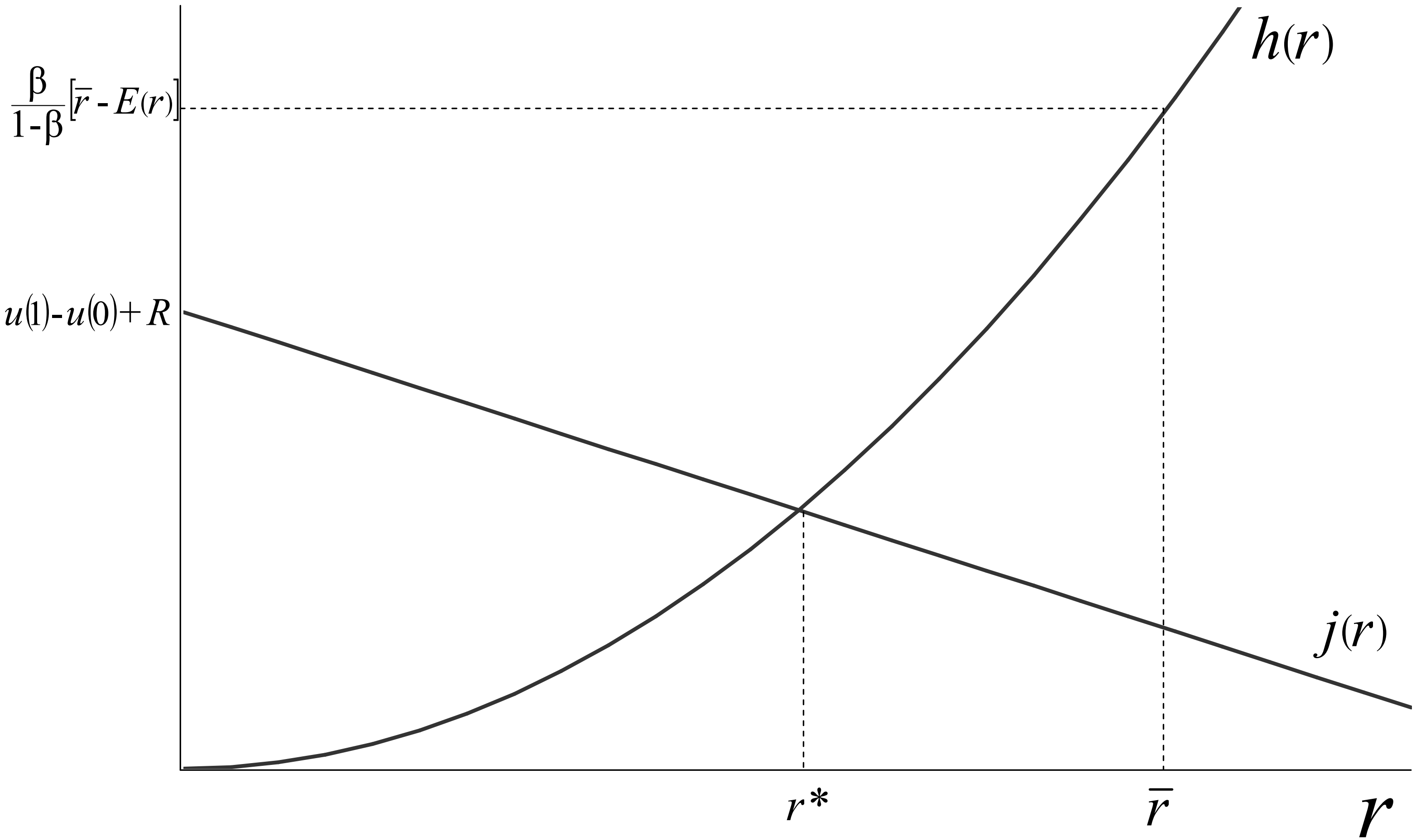
- Si bien no será posible encontrar una expresión explícita de la tasa de interés de reserva sí podremos llegar a una definición implícita que pueda ser derivada respecto a *R*
- La tasa de interés de reserva queda definida por

$$\left[u(1)-r^{*}\right]-\left[u(0)-R\right]=\frac{\beta}{1-\beta}\int_{0}^{r^{*}}\left(r^{*}-r'\right)f(r')\,dr' \qquad (3)$$

- El lado izquierdo de (3) es el costo de oportunidad (en términos de utilidad) de seguir alquilando una vez más cuando se puede pedir una hipoteca pagando la tasa r^*.
- El lado derecho representa el beneficio esperado de alquilar un año más en términos del valor presente esperado asociado a que al individuo se le ofrezca una tasa de interés $r<r^*$.
- En suma, si el agente actúa óptimamente el costo de alquilar un año más se iguala al beneficio de esta misma acción.

- Una vez obtenida la expresión que caracteriza a la tasa de reserva la queremos ver cómo se modifica respecto a R. Para ello definimos el lado derecho de (3) como h(r). Puede demostrarse que es creciente y estrictamente convexa.
- A su vez, definiremos a j(r) como el lado izquierdo de (3). j(r) es decreciente respecto a r

Cuando aumenta *R*, aumenta la tasa de interés de reserva



2. *Efectos de "mean-preserving spreads"*

- Se analiza qué ocurriría con la decisión óptima del individuo si la distribución de tasas de interés se vuelve más riesgosa (incrementa su varianza).
- Usaremos la definición de Rothschild y Stiglitz (1970, 1971) de *mean-preserving spread*: un aumento en la varianza de la distribución de probabilidad que no modifica su media.

- Partiendo de (3) y aplicando el método de integración por partes al lado derecho se obtiene

$$\left[u(1) - r^{*}\right] - \left[u(0) - R\right] = \frac{\beta}{1-\beta}\left\{\left[\left(r^{*} - r'\right)F(r')\right]_0^{r^{*}} + \int_0^{r^{*}} F(r')dr'\right\}$$

- Definiendo $g\left(r^{*}\right) = \int_0^{r^{*}} F(r')dr'$, podemos establecer algunas propiedades de esta función:

$$g(0) = 0 \qquad g\left(r^{*}\right) > 0 \qquad g(\bar{r}) = 1 \qquad g'\left(r^{*}\right) = F\left(r^{*}\right) > 0 \qquad g''\left(r^{*}\right) = f\left(r^{*}\right) > 0$$

- ¿Qué sucedería ante un aumento en el riesgo que mantenga constante la media de la distribución? Para responder esto generaremos una nueva distribución $F_1(r')$, a partir de $F(r')$ que cumpla con las siguientes condiciones:

(i) $\int_0^{\bar{r}} [F_1(r') - F(r')] dr' = 0$; ambas distribuciones tienen la misma media

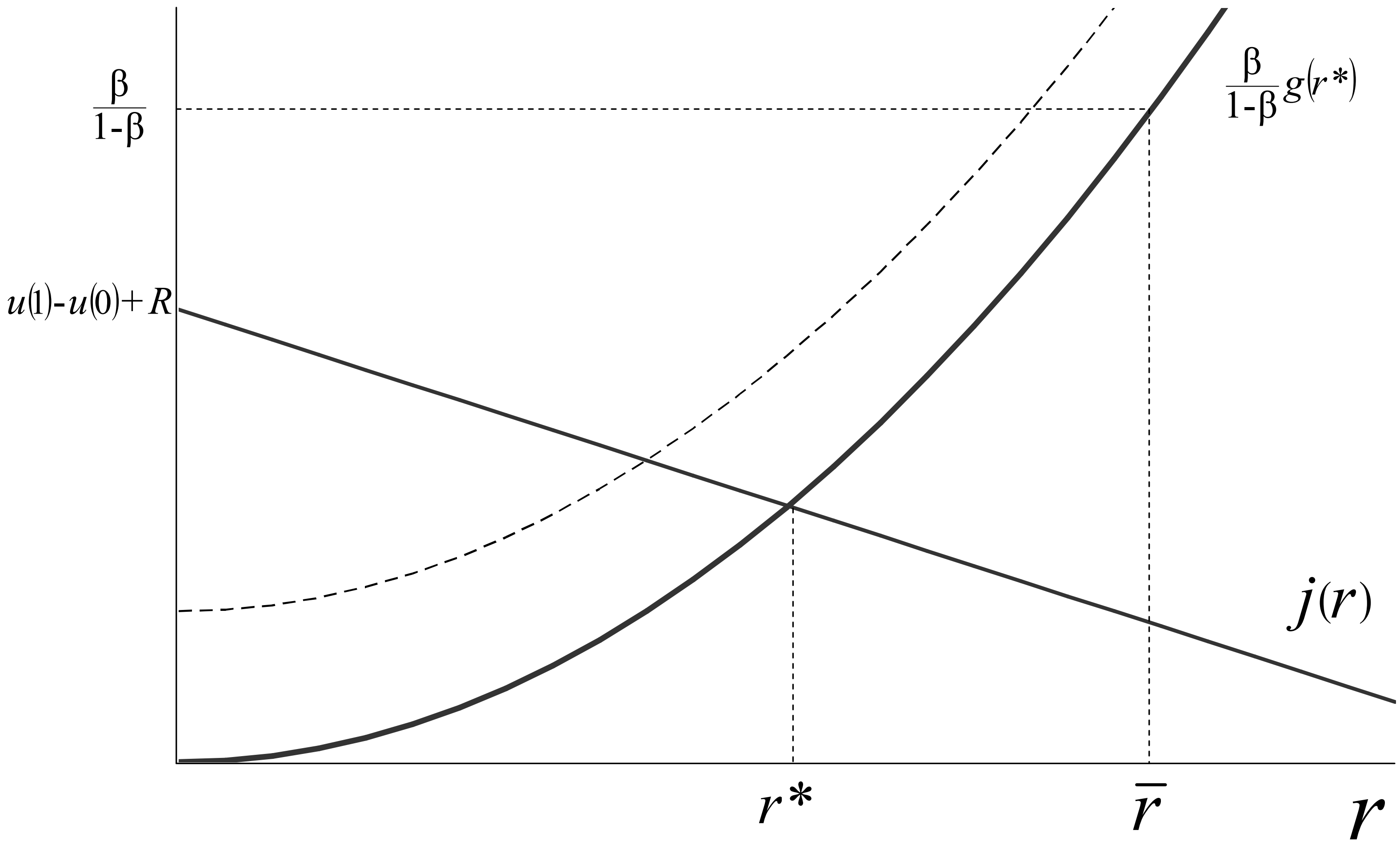
(ii) $\int_0^{r} [F_1(r') - F(r')] dr' \geq 0$ con $0 \leq r \leq \bar{r}$

- Es decir, $F_1(r')$ es obtenida a partir de un proceso que conserva la media de la distribución pero traslada la probabilidad hacia las colas de la distribución, incrementando su varianza o riesgo.
- La condición (ii) equivale –por la forma en que fue definida $g(r^*)$- a:

$$\int_0^{r} F_1(r') dr' \geq \int_0^{r} F(r') dr'$$

$$g_1(r) \geq g(r)$$

Un aumento del riesgo hace caer la tasa de interés de reserva



- Por ende, el efecto de un aumento de estas características en el riesgo, es incrementar g(r), trasladándola en dirección noroeste y reduciendo la tasa de interés de reserva del individuo. Una mayor varianza de la tasa de interés (que no modifique su media) tiene dos efectos:
  - Por un lado, hace más probable que el individuo prefiera seguir "buscando" en vistas a obtener una oferta excepcionalmente baja de tasa de interés.
  - Por otro, un aumento del riesgo incrementa la posibilidad de recibir ofertas excepcionalmente altas de tasa de interés.
- Sin embargo, como vemos en el gráfico, el primer efecto predomina, debido a que las ofertas demasiado caras, pueden rechazarse. Es decir que, un aumento en el riesgo de la distribución, tendería a prolongar el tiempo de alquiler (o de "búsqueda").

Conclusiones

- El modelo presentado permite caracterizar a grandes rasgos la decisión acerca de la tenencia individual de una vivienda. En particular, se puede obtener una expresión implícita de la tasa de interés de reserva y analizar cómo varía ésta ante cambios en el costo de oportunidad de pedir una hipoteca (es decir, de alquilar) y ante cambios en la distribución de probabilidad que mantengan la media constante e incrementen el riesgo.

- Un aumento del costo de alquilar, como era de esperar, incrementa la tasa de interés de reserva del individuo, haciendo más probable que éste decida pedir una hipoteca. Por su parte, un incremento en el riesgo de la distribución de la tasa de interés (que no modifique la tasa de interés media), al volver más probable el hecho de recibir ofertas de tasa de interés demasiado altas, hace caer la tasa de interés de reserva, porque al individuo le resulta óptimo -en una mayor cantidad de situaciones- esperar a que aparezca una oferta menos costosa.

- Sería interesante, para investigaciones futuras, incorporar al modelo algunas modificaciones que lo hagan más realista, como la opción entre elegir tasa fija o variable, o el pago de un downpayment como condición para pedir la hipoteca, o la posibilidad de hacer default.

- También sería útil estudiar qué proporción de la población está endeudada en estado estacionario. El análisis de estos aspectos resultaría fundamental para tener un mejor conocimiento de cómo funciona el mercado inmobiliario, especialmente teniendo en cuenta que la actual crisis financiera internacional tuvo su origen en el mercado hipotecario norteamericano

¡MUCHAS GRACIAS!

Comentarios a marisolrc@gmail.com