Algunas aplicaciones del método de programación dinámica en economía

Marisol Rodríguez Chatruc
(UBA y UdeSA)

FCEN – 03·VI·09

Economía y optimización

- No sólo se estudia optimización al interior de las firmas sino de todos los agentes de la economía
- Supuesto fundamental: racionalidad (todos maximizan “algo”)
- Uno de los objetivos principales es encontrar el nivel de precios y las asignaciones de bienes que hacen consistentes los planes de todos los agentes (equilibrio general)

Modelo de equilibrio general

- La economía tiene 2 tipos de agentes: consumidores y firmas
- **<u>Consumidores</u>**
  - Tienen preferencias acerca de qué les gusta consumir. Pueden ordenar diferentes canastas (combinaciones de bienes) según cuál es más preferida
  - Maximizan su utilidad (nivel de satisfacción o de bienestar)
  - Suponemos a la utilidad como una función que va del espacio de bienes a R, donde el valor de la utilidad tiene una interpretación <u>ordinal</u> (no cardinal):

$$u : X \to \mathrm{R}$$

  - Para simplificar:

$$X \subset R^L$$

- Propiedades deseables: u es estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y continuamente diferenciable al menos una vez.
- Problema del consumidor:

$$\underset{x \in X}{Max}\{u(x)\}$$

$$sa: \; px \leq p\omega + \theta y$$

$p:$ vector de precios

$x:$ vector de consumo

$\omega:$ vector de dotaciones iniciales

$\theta:$ derecho a ganancias de la firma

$y:$ vector de producción

Problema del productor

$$\underset{y}{Max}\{py\}$$

y : vector de producción

$y \in Y$, donde $\mathrm{Y} \subset \mathrm{R}^{L}$ es la tecnología o conjunto de producción

Consistencia de planes

- Definición: un equilibrio es una asignación de consumo y producción (x*,y*) y un vector de precios *p* tales que:
  - Dados los precios y la riqueza, x* maximiza la utilidad del consumidor
  - Dados los precios, y* maximiza las ganancias del productor
  - Los mercados se vacían:

$$x^* = \omega + y^*$$

Economía con un solo agente, tiempo infinito y shocks aleatorios

- Problema del agente

$$\underset{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max}\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

$$sa:\ k_{t+1} + c_t \leq z_t f(k_t)\ ,\ c_t, k_{t+1} \geq 0 \quad \forall t, z_t$$

$$k_{t+1} = k_t + i_t$$

$$0 < \beta < 1$$

Donde:

β: factor de descuento

c: consumo del único bien

z: shock aleatorio (markoviano) sobre la productividad

k: stock de capital

f(k): función de producción

- El problema se puede expresar únicamente en función del capital:

$$\underset{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{Max}\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(z_t f\left(k_t\right) - k_{t+1}\right)$$

$$sa\ \ 0 \leq k_{t+1} \leq z_t f\left(k_t\right)\ ,\ k_0 > 0\ \ dado$$

Timing: al principio de cada periodo t, tiene lugar la realización de z_t. Entonces, el par (k_t,z_t) y, por lo tanto, el valor total del output $z_t f(k_t)$, son conocidos cuando el consumo c_t tiene lugar y cuando se acumula el capital de fin de periodo k_{t+1}

El par (k_t,z_t) es el **estado** de la economía en t

- La solución del problema es una sucesión de planes de consumo y de acumulación de capital *contingentes* (a la historia de realizaciones del shock) en cada periodo:
- En t=0 el agente elige:

$$
\begin{aligned}
&(c_0, k_1) \\
&\left\{c_t(z^t), k_{t+1}(z^t)\right\}_{t=1}^{\infty} \\
&\textit{donde} \;\; z^t \equiv (z_1, z_2, \ldots, z_t) \;\; \textit{historia de shocks}
\end{aligned}
$$

Formulación recursiva

- La ecuación de Bellman del problema es:

$$V(k,z) = \max_{k' \in \Gamma(k,z)} \{U[zf(k) - k'] + \beta \mathrm{E}[V(k',z)]\}$$

$$\Gamma(k,z) \equiv \{k' : k' \in [0, zf(k) + k]\}$$

Es una ecuación funcional en V, a la cual podemos interpretar como el valor maximizado (de la función de utilidad) a lo largo de todos los periodos

- Definimos a la función (correspondencia) de política como el plan óptimo de acumulación de capital que maximiza la expresión anterior:

$$g(k) = \underset{k' \in \Gamma(k,z)}{arg\,max} \; U[zf(k) - k'] + \beta \sum_{z' \in Z} V(k',z) Q(z,z') \quad = k'^*$$

Existencia y unicidad de función de valor

- Supuestos:
  - X (conjunto de posibles valores de k') es **<u>convexo</u>**.
  - Γ es no vacía, compact valued y continua
  - U es continua y acotada con 0<β<1

- <u>Teorema</u>: Dados los supuestos anteriores y sea C(X,z) el espacio de funciones continuas y acotadas. Sea T definida por:

$$Th(k,z) = \max_{k' \in \Gamma(k,z)} U[zf(k) - k'] + \beta \sum_{z' \in Z} h(k',z)\,Q(z,z')$$

Entonces, T tiene un único punto fijo $V \in C(X,z)$

Algunos comentarios

- Imponiendo más supuestos a la función de utilidad podemos caracterizar todavía mejor a la función de valor y lograr que la correspondencia de política se convierta en función
- Cómo se contrastan los resultados empíricamente? calibración de parámetros del modelo con datos de la "realidad". Requiere suponer formas funcionales. Contrastación de resultados con datos empíricos.

Bibliografía

- Stokey, N. L. y R.E. Lucas Jr. con E. C. Prescott (1989) *“Recursive Methods in Economic Dynamics”*
- Ljungqvist, L. y T. J. Sargent (2000) “Recursive Macroeconomic Theory”