Geometría Diferencial 2009

Práctica 7 - Teorema de Frobenius

1. Para una variedad M de dimensión d, notamos $\Omega^*(M) = \bigoplus_{i=0}^d \Omega^i(M)$. Sea D una distribución de k-planos sobre M y $\mathcal{I}(D) = \{\omega \in \Omega^*(M)\ \omega|_D = 0\}$ el anulador de D.

    a) Probar que $\mathcal{I}(D)$ es un ideal de $\Omega^*(M)$

    b) Probar que para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U y 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_{d-k}$ tales que $\mathcal{I}(D)|_U =< \omega_1, \ldots, \omega_{d-k} >$.

    c) Recíprocamente si $I \subseteq \Omega^*(M)$ es un ideal localmente generado por $d-k$ 1-formas l.i. entonces existe una única distribución D de dimensión k tal que $I = I(D)$

    d) Probar que D es involutiva si y sólo si $\omega \in \mathcal{I}(D) \Rightarrow d\omega \in \mathcal{I}(D)$.

2. Sea I un ideal de formas diferenciales localmente generado por r 1-formas l.i. Probar que son equivalentes:

    a) I es diferencial (o sea $d(I) \subseteq I$).

    b) Si $\omega_1, \ldots, \omega_r$ son generadores de I en un abierto $U \subseteq M$, entonces existen formas $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$ tales que $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$.

    c) Si $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$, entonces existe $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $d\omega = \alpha \wedge \omega$.

3. Si D es una distribución (no necesariamente involutiva) un campo X se dice campo característico de D si $X \in D$ y para todo $Y \in D$ se tiene $[X, Y] \in D$. Probar que X es un campo característico de D si y sólo si para toda 1-forma $\omega \in I(D)$ se tiene que $i(X)(\omega) = 0$ y $i(X)(d\omega) \in I(D)$.

4. Dada una distribución D de dimensión k se define, para cada $p \in M$, $\Delta_p \subseteq T_pM$ como el subespacio generado por los campos característicos de D. Supongamos que $\dim \Delta_p = l$, $\forall p \in M$.

    a) Probar que Δ es una distribución involutiva (una subvariedad integral maximal de Δ se llama *Variedad característica* de D).

    b) Probar que existe una carta (U, φ) adaptada a Δ tal que en esa carta existen generadores $< \omega_1, \ldots, \omega_{d-l} > \in I(D)$ que se escriben como

    $$\omega_j = \sum_{i=l+1}^{d} f_{ij}(x_{l+1}, \ldots, x_d) dx_i,$$

    y que Δ es maximal con esta propiedad.

5. Sea D una distribución involutiva de dimensión k sobre M y sea $\iota : P \to M$ una subvariedad integral de D. Supongamos que se tiene una función diferenciable $f : N \to M$ que se factoriza a través de P. Probar que la (única) función $g : N \to P$ tal que $\iota \circ g = f$ es necesariamente diferenciable.

6. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie (i.e.: el conjunto de campos invariantes a izquierda, que identificamos con T_eG). Probar que existe una correspondencia biyectiva entre:

   a) Sub-álgebras de Lie, es decir subespacios vectoriales $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ cerrados por corchete.

   b) Subvariedades regulares $\iota : S \to G$ conexas tales que $\iota(S) \subset G$ es un subgrupo.

7. Probar que el gráfico de una función diferenciable $f : M \to N$ es variedad integral del ideal de formas $I \subseteq \Omega^*(M \times N)$ generado por $\{p_1^* f^*(\omega) - p_2^*(\omega) : \omega \in \Omega^1(N)\}$.