Geometría Diferencial 2009

Práctica 6 - Integración

1. Probar que si α y β son formas diferenciales cerradas, entonces $\alpha\wedge\beta$ es cerrada. Probar que si además α o β es exacta, entonces $\alpha \wedge \beta$ también lo es.

2. Probar que si $f : M \to N$ es diferenciable y $\omega \in \Omega^k(N)$ es cerrada (resp. exacta), entonces $f^*\omega$ es cerrada (resp. exacta).

3. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada M cumple las siguientes propiedades:

   a) Si $-M$ denota la variedad on la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.
   b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
   c) Si ω es una n-forma continua y positiva entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se da sólo si $\omega = 0$.
   d) Si $f : M \to N$ es un difeo y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm\int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.

4. Sea $\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Probar que α es una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcular la integral de α sobre S^1. Concluir que α no es exacta. Concluir que $i^*\alpha$ no es exacta, donde $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es la inmersión canónica.

5. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\omega(x) = \sum_i \frac{(-1)^i x_i}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

   a) Probar que ω es cerrada pero no exacta.
   b) Calcular $\int_{S^{n-1}} \omega$.
   c) Calcular la integral de ω sobre el elipsoide $\{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$.

6. Sea M variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Probar que

   a) Si S es subvariedad de M compacta, sin borde y orientada de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M, entonces $\int_S \omega = 0$.
   b) Si W es subvariedad de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k orientadas, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$

7. Probar que si M es compacta, orientable y sin borde de dimensión n, entonces una n-forma nunca nula no es exacta.

8. Sea C una curva $\mathcal{C}^1$ en una variedad M, parametrizada por $\Gamma : [a, b] \to M$. Si ω es una 1-forma en M, definimos la integral de línea de ω a lo largo de C por $\int_C \omega := \int_{[a,b]} \Gamma^*\omega$.

a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida.

b) Si $\omega = df$ con $f \in \Omega^0(M)$ y la curva C recorre del punto p al punto q, entonces $\int_C \omega = f(q) - f(p)$. En particular, la integral es independiente de la curva elegida entre p y q.

9. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2.
Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta; ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.

10. Sea M variedad riemanniana orientada. Se define la n-forma *de volumen* V como la única que cumple $V_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ortonormal orientada de T_pM. En coordenadas locales (U, ϕ), se tiene $(\phi^{-1})^*(V) = \sqrt{g} dx_1 \ldots dx_n$, donde $g = \det(g_{ij})$.

    a) Calcular la matriz (g_{ij}) para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y cilíndricas.

    b) Calcular la matriz (g_{ij}) y la forma de volumen para ${}^S1$ y S^2, y calcular los respectivos volúmenes.

11. Sea ω la forma de volumen de una variedad riemanniana orientada M de dimensión n. Sean $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ campos de vectores en M. Probar que
$$\omega(X_1, \ldots, X_n) \cdot \omega(Y_1, \ldots, Y_n) = \det\{< X_i, Y_j >\}.$$
Probar también que
$$\omega(X_1, \ldots, X_n)\omega = \tilde{X}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{X}_n$$
donde $\tilde{X}_i$ es la 1-forma dual (vía la estructura riemanniana) al campo X_i.

12. Dada M variedad de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, se da a M la estructura riemanniana inducida, es decir para $p \in M$ y $v, w \in T_pM$ vale $< v, w >_p := < df(v), df(w) >_{f(p)}$.

    Supongamos que M es orientada, y que η es el campo de vectores normales unitarios en $f(M)$ que dan la orientación. Probar que la forma de volumen en M es dada por
$$\omega = f^*(i(\eta)(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})).$$