

# Geometría Diferencial 2009

## Práctica 5 - Formas

1. Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. Sea  $\alpha \in \Gamma((T^*N)^{\otimes r})$  un campo de covectores de grado  $r$ , al que identificamos, en cada  $y \in N$ , con un campo de aplicaciones multilineales  $T_y N \times \cdots \times T_y N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Probar que  $f$  induce un campo de covectores de grado  $r$ ,  $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*M)^{\otimes r})$ , que vía la identificación anterior se define por

$$f^*(\alpha)(x)(v_1, \dots, v_r) = \alpha(f(x))(df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_r)).$$

Si  $(U, \phi)$  es una carta de  $M$  alrededor de  $x$ ,  $(V, \psi)$  es una carta de  $N$  alrededor de  $y = f(x)$ ,  $f(U) \subseteq V$  y  $\alpha$  se escribe localmente como

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} a_{i_1, \dots, i_r}(x) d\psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\psi_{i_r},$$

encontrar las coordenadas de  $f^*(\alpha)$  en la base  $d\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\phi_{i_r}$ .

Probar que si  $\alpha$  es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos),  $f^*(\alpha)$  también lo es.

2. Sea  $M$  una variedad,  $\omega$  una 1-forma en  $M$ . Sean  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  dos cartas alrededor de un punto  $x \in M$ . Si  $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\phi_i = \sum_i \beta_i d\psi_i$ , encontrar la relación entre los  $\alpha_i$  y los  $\beta_i$ .
3. Si  $\omega$  es una  $k$ -forma, ¿es cierto que  $\omega \wedge \omega = 0$ ? ¿Y si  $\dim M = 3$ ?
4. Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $(U, \phi)$  una carta y  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Calcular  $d\omega|_U$  en las coordenadas de  $(U, \phi)$  para los casos  $0 \leq p \leq 2$ .
5. Sea  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Probar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

6. Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial diferenciable en el sentido usual.

a) Demostrar que  $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$  define una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$ . Encontrar las coordenadas de  $\omega_F^1$  en la base  $\{dx, dy, dz\}$ . Recíprocamente, probar que una 1-forma  $\omega$  en  $\mathbb{R}^3$  determina un único campo  $G$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\omega_G^1 = \omega$ .

- b) Demostrar que  $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$  define una 2-forma en  $\mathbb{R}^3$ . Calcular sus coordenadas en la base  $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$ . Recíprocamente, probar que toda 2-forma  $\omega$  define un único campo  $G$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\omega_G^2 = \omega$ .
- c) Sea  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ . Encontrar la relación entre
- 1)  $df$  y  $\nabla f$ ;
  - 2)  $\text{rot } F$  y  $d\omega_F^1$ ;
  - 3)  $\text{div } F$  y  $d\omega_F^2$  (aquí identificamos  $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  usando la base  $dx \wedge dy \wedge dz$ ).

Concluir, usando la relación  $d \circ d = 0$ , las fórmulas  $\text{rot } \nabla \equiv 0$  y  $\text{div rot} \equiv 0$ .

7. Probar que una variedad es orientable si y sólo si su fibrado cotangente lo es.
8. Sea  $M$  una variedad y  $TM$  su fibrado tangente. Probar que  $TM$  es orientable.
9. Probar que si  $M$  tiene un atlas de la forma  $\mathcal{A} = \{(U, x); (V, y)\}$  donde  $U \cap V$  es conexo, entonces  $M$  es orientable.
10. Ver que si  $M$  es paralelizable, entonces es orientable.
11. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:
  - a)  $M$  y  $N$  son orientables
  - b)  $M \times N$  es orientable
12. Probar que la esfera  $S^n$  y  $\mathbb{R}^n$  son orientables. Probar que el  $n$ -toro  $T^n$  y el cilindro son orientables. Probar que  $P^n$  es orientable si y sólo si  $n$  es impar.
13. Sea  $M$  una variedad (conexa) orientada,  $\mathcal{A}$  un atlas orientado y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo. Probar que si  $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$  entonces el signo de  $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$  es constante (donde está definida la composición) y no depende de las cartas.  
*Se dice que  $f$  preserva la orientación si  $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$  es positivo. En caso contrario, se dice que  $f$  invierte la orientación.*
14. Sea  $V$  un espacio vectorial con base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ; sea  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  su base dual. En  $V \otimes V^*$  consideramos el elemento  $I = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^*$ . Probar que este elemento no depende de la base elegida.
15. Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $T^*M$  su fibrado cotangente. Sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$ , sea  $V = \pi^{-1}(U)$  el abierto correspondiente de  $T^*M$  y  $\psi : V \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ ,  $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_n, \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n})$ . Tomamos la 2-forma en  $V$  dada por  $J = \sum_{i=1}^n d\psi_i \wedge d\psi_{n+i}$ . Probar que no depende de la carta  $(U, \phi)$ ; es decir, si  $(U', \phi')$  es otra carta,  $V'$  y  $J'$  se definen de manera análoga, entonces  $J = J'$  en la intersección  $V \cap V'$  (usar el ejercicio anterior). Deducir que esto define una 2-forma global  $J \in \Omega^2(T^*M)$ . Probar que es no degenerada y cerrada.  
*Una variedad con una 2-forma no degenerada y cerrada se dice simpléctica.*