

# Geometría Diferencial 2009

---

## Práctica 4 - Campos de vectores

1. Sea  $M$  una variedad,  $p \in M$  y  $v \in T_pM$  un vector tangente. Probar que existe un campo  $X \in \Gamma(TM)$  tal que  $X(p) = v$ .
2. Sea  $p \in M$ ,  $X$  un campo definido en un entorno de  $p$  tal que  $X(p) \neq 0$ . Probar que existe una carta  $(U, \phi)$ , con  $U$  incluido en el dominio de  $X$ , tal que  $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$ .
3. Sea  $p \in M$ ,  $X_1, \dots, X_k$  campos definidos en un entorno de  $p$  tales que los vectores  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  son l.i. en  $T_pM$ . Probar que existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$  es un conjunto l.i. para todo  $q \in U$ .
4. Probar que un campo  $X$  en  $M$  define una derivación en  $\mathcal{D}(M)$  via  $f \mapsto X(f)$ , donde  $(X(f))(p) := X(p)(f_p)$  con  $f_p$  el germen de  $f$  en  $p$ . Probar que de este modo se tiene una biyección entre  $\Gamma(TM)$  y las derivaciones de  $\mathcal{D}(M)$ .
5. Sean  $X, Y$  campos en  $M$ , vistos como derivaciones  $X, Y : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ . Mostrar con un ejemplo que  $X \circ Y$  no es necesariamente una derivación. Probar que  $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$  siempre lo es.
6. Sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$ . Probar que  $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0 \forall i, j$ .
7. Sea  $M = \mathbb{R}^2$ . Identificando  $T_pM$  con  $M$  de la manera natural, probar que no existe una carta  $(U, \phi)$  tal que los campos  $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$  coincidan respectivamente con los campos  $(x, y) \mapsto (1, 0), (x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$ .
8. Dados  $X, Y$  campos en  $\mathbb{R}^n$ , hallar una fórmula general para el conmutador  $[X, Y]$ .
9. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial  $V$  junto con una aplicación bilineal  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

**Antisimetría:**  $[X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in V$ ;

**Identidad de Jacobi:**  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \forall X, Y, Z \in V$ .

Probar que  $\Gamma(TM)$  es un álgebra de Lie.

10. Sea  $G$  un grupo de Lie. Para  $g \in G$ , notamos  $L_g : G \rightarrow G$  el difeomorfismo  $L_g(h) = gh$ . Sea  $X \in \Gamma(TG)$  un campo. Decimos que es *invariante a izquierda* si  $\forall g, h \in G$  se tiene  $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$ . Es decir, si  $(dL_g)X = XL_g$ .
  - a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo  $G$ .

- b) Probar que si  $v \in T_g(G)$ , existe un único campo invariante a izquierda  $X$  tal que  $X(g) = v$ .
- c) Deducir que hay un isomorfismo entre  $T_e(G)$  y el espacio de campos invariantes a izquierda.
11. Una variedad  $M$  es *paralelizable* si existen campos  $X_1, \dots, X_m$  tales que para todo  $p \in M$  el conjunto  $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$  es una base de  $T_p M$ .
- a) Probar que  $S^1$  y  $S^3$  son paralelizables;
- b) Probar que el toro  $T^n$  es paralelizable;
- c) Más en general, probar que todo grupo de Lie es paralelizable;
- d) Hallar un ejemplo de variedad  $M$  que no sea paralelizable.
12. Probar que si  $M$  es paralelizable, entonces  $TM$  es difeomorfa a  $M \times \mathbb{R}^d$ .
13. Sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable. Un par de campos  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $Y \in \Gamma(TN)$  se dicen  *$f$ -relacionados* si  $Y(f(p)) = (df)(X(p))$  para todo  $p \in M$ , es decir, si  $Yf = (df)X$ . Notamos  $X \sim_f Y$ .
- a) Probar que si  $X \sim_f Y$  y  $Y \sim_g Z$ , entonces  $X \sim_{gf} Z$ .
- b) Probar que  $\gamma$  es una curva integral de  $X$  si y sólo si  $\frac{\partial}{\partial t} \sim_\gamma X$ . Concluir que si  $\gamma$  es una curva integral de  $X$  y  $X \sim_f Y$ , entonces  $f\gamma$  es una curva integral de  $Y$ .
- c) Probar que si  $X_1 \sim_f Y_1$  y  $X_2 \sim_f Y_2$  entonces  $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$ .
- d) Probar que los siguientes son equivalentes.
- $X \sim_f Y$ ;
  - para todo abierto  $U \subseteq N$  y toda  $g \in \mathcal{D}(U)$  se satisface  $Y(g)f = X(gf)$  en  $f^{-1}(U)$ ;
  - para toda  $g \in \mathcal{D}(N)$  se satisface  $Y(g)f = X(gf)$  en  $f^{-1}(N)$ .
14. Sea  $\gamma$  una curva integral de un campo  $X$  definido sobre  $M$ . Probar que si  $\dot{\gamma}(t) = 0$  para algún  $t$ , entonces  $\gamma$  es constante.
15. Probar que si  $M$  es compacta y  $X \in \Gamma(TM)$ , entonces  $X$  es completo.
16. Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, propia y tal que todo  $t \in \mathbb{R}$  es valor regular.
- a) Probar que existe  $X \in \Gamma(TM)$  tal que  $X \sim_f \frac{\partial}{\partial t}$ . ¿Es  $X$  único?
- b) Sea  $X$  como en a). Probar que  $X$  es completo.
- c) Probar que  $f^{-1}(u)$  es difeomorfo a  $f^{-1}(u')$  para todo par  $u, u' \in \mathbb{R}$ .