

# Geometría Diferencial 2009

---

## Práctica 3

1. Probar que si  $M$  y  $N$  son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.
2. Sea  $i : S \rightarrow M$  subvariedad y *propia*, es decir, la preimagen de compactos es compacto. Probar que  $i$  es una inmersión. Concluir que si  $i : S \rightarrow M$  es subvariedad y  $S$  es compacta entonces  $i$  es inmersión.
3. Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensión  $d$  y sea  $f : M \rightarrow N$  regular. Probar que  $f$  es un homeomorfismo local.
4. Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensión  $d$ , con  $M$  compacta, y sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable.
  - a) Probar que si  $p \in N$  es valor regular, entonces  $f^{-1}(p)$  es un conjunto finito.
  - b) Probar que la asignación  $p \mapsto \#f^{-1}(p)$  es localmente constante (donde  $p$  recorre valores regulares de  $f$ ).
5.
  - a) Sea  $(U, \phi_N)$  la carta de  $S^2$  dada por la proyección estereográfica. Probar que un polinomio  $P \in \mathbb{C}[X]$  define una función diferenciable  $f_P : S^2 \rightarrow S^2$  cuya expresión local  $\phi_N \circ f_P \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se identifica con  $P$ .
  - b) Probar el teorema fundamental del álgebra.
6. Sea  $M$  una variedad de dimensión  $d$ ,  $p \in U \subset M$ ,  $U$  abierto, y  $\phi_1, \dots, \phi_d : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables tales que  $d_p\phi_1, \dots, d_p\phi_d$  son linealmente independientes. Probar que las funciones  $\{\phi_i\}$  determinan una carta de  $M$  en un entorno de  $p$ .
7.
  - a) Sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable,  $\dim M \leq \dim N$ . Sea  $p \in M$  punto regular, y sea  $(U, \phi)$  carta de  $N$  con  $f(p) \in U$ . Probar que un subconjunto de las funciones  $\{\phi_i \circ f\}$  determina una carta de  $M$  en un entorno de  $p$ .
  - b) Sea  $S \subset N$  subvariedad inmersa (la inclusión es una inmersión) y sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable satisfaciendo  $f(M) \subset S$ . Probar que  $f : M \rightarrow S$  es diferenciable.
8. Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable y sea  $S$  una subvariedad inmersa de  $N$  tales que para todo  $p \in f^{-1}(S)$  vale  $d_p f(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$ . Probar que  $f^{-1}(S)$  es una subvariedad inmersa de  $M$  de dimensión  $\dim M - \dim N + \dim S$ .
9. Dos subvariedades inmersas  $S_1, S_2$  de  $M$  son *transversales*, y lo notamos  $S_1 \pitchfork S_2$ , si para todo  $p \in S_1 \cap S_2$  vale  $T_p S_1 \cap T_p S_2 = \{0\}$  ó  $T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$ . Probar que si  $S_1 \pitchfork S_2$ , entonces  $S_1 \cap S_2$  es una subvariedad inmersa de  $M$ . Probar además que si  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , entonces  $\dim S_1 \cap S_2 = \max(\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M, 0)$ .