Geometría Diferencial 2009

Práctica 2 - Espacio tangente. Subvariedades

En esta práctica M denotará una variedad T2 y N2, $\mathcal{A}$ un atlas de M y $d = dim(M)$. Con p denotamos un punto de M y con $\mathcal{D}_p(M)$ el anillo de gérmenes en p, cuyo ideal maximal es $\mathcal{M}_p$.

1. Consideramos el anillo $\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R}[X]/(X)^2$. Probar que T_pM se puede identificar con los morfismos de anillos $\mathcal{D}_p(M) \to \mathbb{R}[\epsilon]$.

2. Consideremos una familia como sigue: para cada carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$, tomamos un vector $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, de manera tal que si (V, ψ) es otro entorno coordenado de p con vector asociado $w = (w_1, \ldots, w_d)$, entonces $w^t = d(\psi\varphi^{-1})(\varphi(p))v^t$. Probar que la colección de estas familias se puede identificar con T_pM.

3. Probar que se puede identificar T_pM con los morfismos lineales $d : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ tales que $d(fg) = d(f)g(p) + f(p)d(g)$.

4. Sea (U, ϕ) una carta con $p \in U$, $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^d)$. Probar que

$$\{\overline{\phi^1 - \phi^1(x)}, \ldots, \overline{\phi^d - \phi^d(x)}\}$$

   es una base de $\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2$.

5. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $X = \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$ su gráfico, visto como variedad mediante la carta (X, π), $\pi(u, f(u)) = u$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$, $g(u, f(u)) = f(u)$. Calcular $\frac{\partial}{\partial \pi^i}|_p(g)$ en función de las derivadas parciales de f.

6. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ la esfera, y sea $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(p) = (\text{dist}(p, N))^2$, donde $N = (0, 0, 1)$ y dist es la distancia euclídea.

   a) Probar que f es diferenciable.

   b) Sean (U, ϕ_N) y (V, ϕ_S) las proyecciones estereográficas. Sea $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Se definen

   $$v_1 = 8\frac{\partial}{\partial \phi_N^1}|_p + 5\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \phi_N^2}|_p, \qquad v_2 = (-15\sqrt{2}+20)\frac{\partial}{\partial \phi_S^1}|_p + (-24+16\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial \phi_S^2}|_p.$$

   Calcular $v_1(f)$ y $v_2(f)$.

   c) Probar que $v_1 = v_2$.

7. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro, mirando $S^1 \subset \mathbb{C}$. Se toma la función $f(e^{it}, e^{iu}) = \text{sen}(nt)\cos(mu)$, donde $n, m \in \mathbb{Z}$. Elegir alguna carta alrededor de $p = (1, 1) \in T$ y calcular las derivadas de f con respecto a las coordenadas dadas por la carta en p.

8. Sean X, Y variedades, $x \in X$, $y \in Y$. Tomamos las inclusiones $i_X : X \to X \times Y$, $i_X(a) = (a, y)$, e $i_Y : Y \to X \times Y$, $i_Y(b) = (x, b)$. Probar que $T_{(x,y)}(X \times Y) = (i_X)_{*x} T_x X \oplus (i_Y)_{*y} T_y Y$.

9. Calcular el diferencial de $f : S^1 \times (-1, 1) \to S^2$,
$$f(z, t) = (z_1\sqrt{1-t^2}, z_2\sqrt{1-t^2}, t), \qquad \text{donde } z = z_1 + iz_2,$$
en los puntos de la forma $(1, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$.

10. Sea $f : X \to Y$ diferenciable, $y \in Y$ un valor regular. Probar que si sobre $Z = f^{-1}(y)$ se toma la estructura dada por el teorema de la función implícita, entonces $i_{*p}(T_p Z) = \ker(f_{*p})$, donde $i : Z \to X$ es la inclusión.

11. Sea $X = \mathrm{Gl}_n (= \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}))$ y se considera $\det : X \to \mathbb{R}$. Dado que Gl_n es un abierto, identificamos $T_I \mathrm{Gl}_n \simeq T_I M_n \simeq M_n$ y llamamos e_{ij} a las coordenadas. Calcular $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}}$. Expresar en coordenadas en la base $\{e_{ij}\}$ la imagen de $T_I(\mathrm{Sl}_n) \hookrightarrow T_I(\mathrm{Gl}_n)$.

12. Repetir el ejercicio anterior para la inclusión $\mathrm{SO}_n \hookrightarrow \mathrm{Gl}_n$.

13. Si $f : M \to N$ es inyectiva y $\dim N = 1$ entonces $\dim M \leq 1$.

14. Sea M una variedad compacta de dimensión d. Demostrar que una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}^d$ no puede ser no singular en todo punto.